fisic

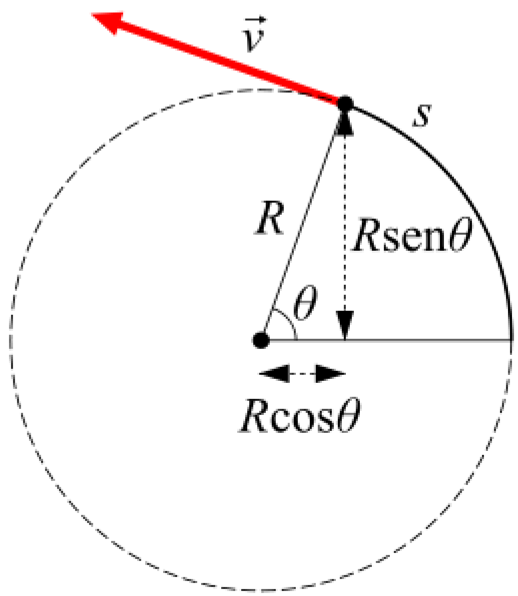
Movimiento circunferencial

Liceo Juan XXIII Villa Alemana

Tercero Medio Diferenciado 2015

Conocimiento previos

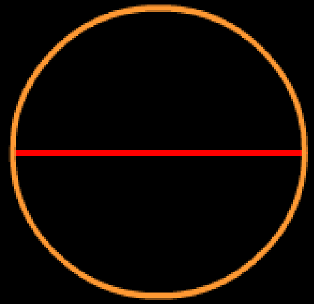
- Algebra vectorial
- Trigonometría
- Medición de ángulos en radianes
- Elementos de geometría básicos
- Cinemática bidimensional
- Leyes de Newton



fisic

jlay@usach.cl

radianes

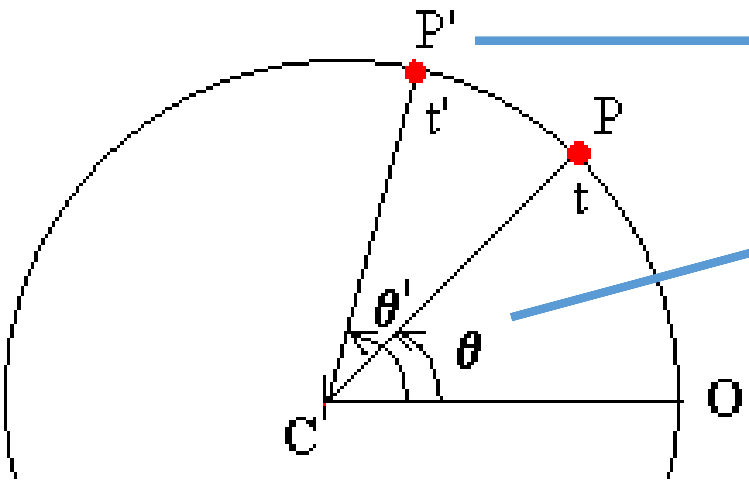


circunferencia de diámetro d
hecha con una cuerda de largo L

presione boton continuar para
observar la relación entre L y d

continuar

Vector posición angular

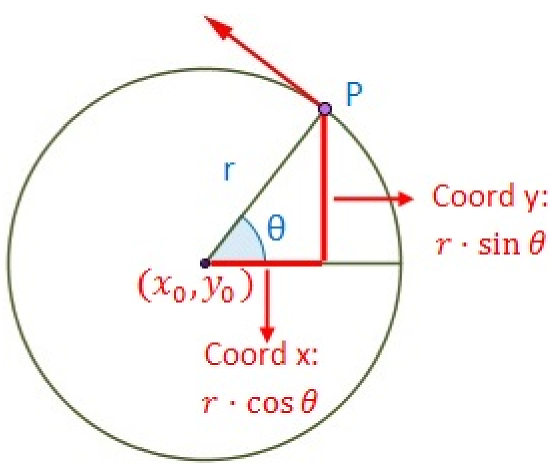


$$P' - P = \Delta s$$

$$\theta' - \theta = \Delta\theta$$

$$r\Delta\theta = \Delta \mathrm{s}$$

Esta ecuación debe utilizarse con los ángulos medidos en radianes



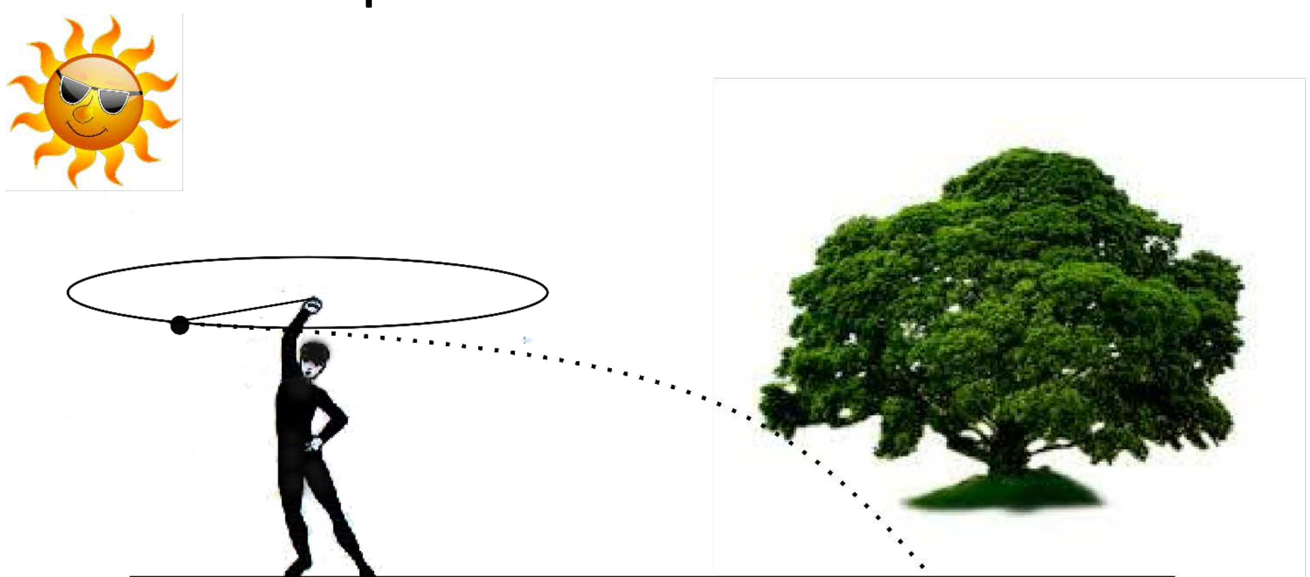
$$\vec{r} = (x_o + r\,cos\theta)\hat{\imath} + (y_o + r\,sin\theta)\hat{\jmath}$$

Posición en coordenadas cartesianas

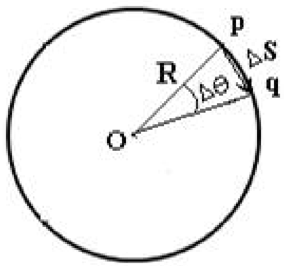
Problema

fisic

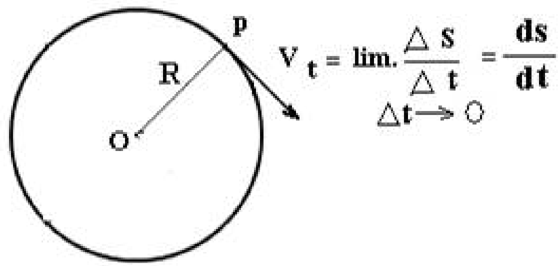
Un estudiante toma una piedra de masa “m”, la ata a un cordel de longitud “L” y la hace girar entorno a él. Si en un instante “t”, se suelta la piedra. ¿a qué distancia de donde se ubica el estudiante cae finalmente la piedra?



Velocidad tangencial



(a)



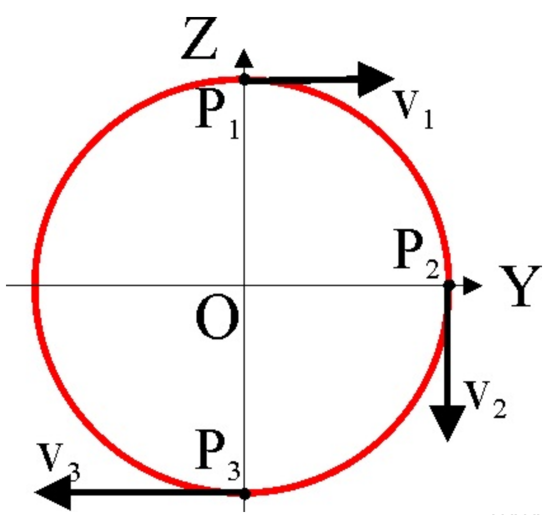
(b)

$$r\Delta\theta = \Delta s \quad / \frac{1}{\Delta t}$$

$$r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$r\,\omega = v_t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_t$$

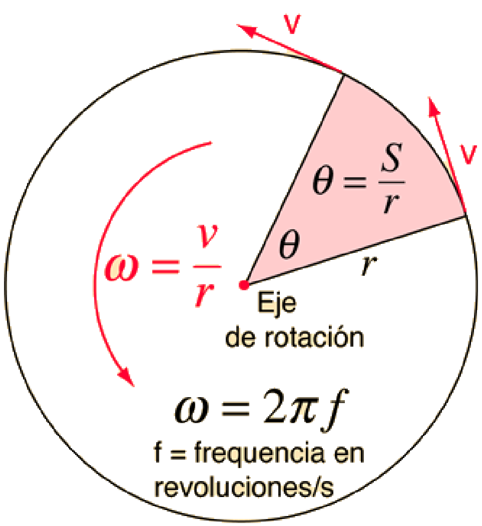


Cuando hablamos de **velocidad tangencial**, entonces debemos pensar en el módulo, sentido y dirección. En este caso nunca tendremos **velocidad tangencial** constante, en cambio cuando hablamos de **rapidez media tangencial**, sólo consideramos el módulo y si podemos considerarla constante.

Velocidad angular

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\theta_{t_0} - \theta_t}{t_0 - t}$$

siendo θ_0 el ángulo en el instante t_0 y θ_t el ángulo en el instante t



Cuando no consideramos la dirección del vector velocidad angular y los intervalos de tiempo son grandes, entonces hablamos de rapidez media angular.

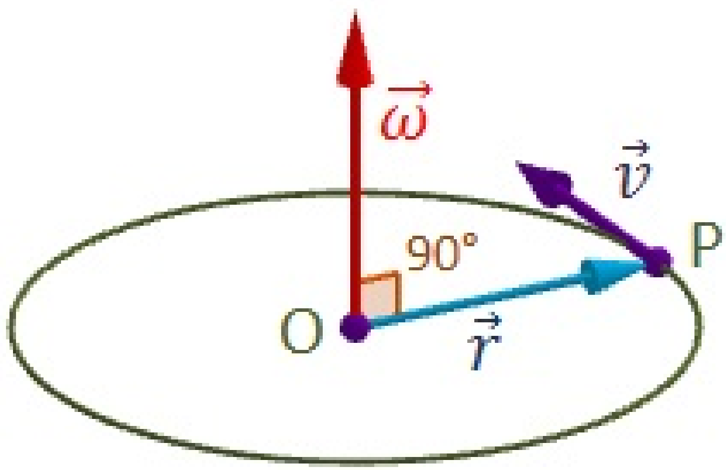
$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega_m$$

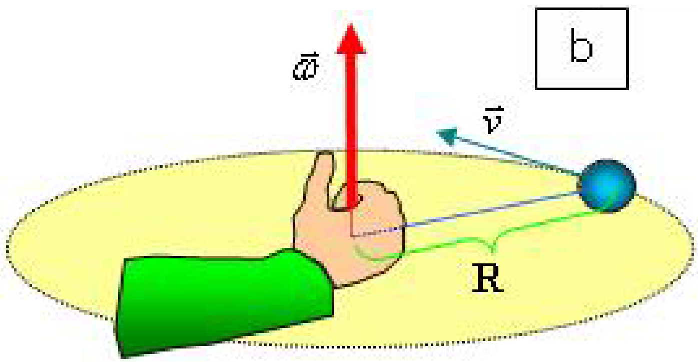
Si la rapidez angular es constante, entonces podemos expresarla en función del periodo y la frecuencia, recordando que

$$\frac{1}{T} = f$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Velocidad angular
Nociones vectoriales



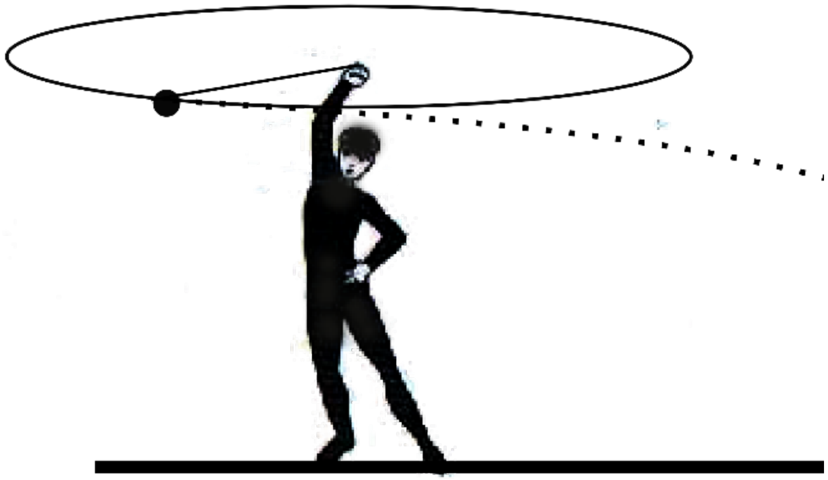


$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Si el cuerpo gira en sentido anti-manecillas del reloj, como muestra la figura, entonces la rapidez angular es hacia arriba, positivo, pero si gira en sentido de las manecillas del reloj, entonces es negativo y va dirigido hacia abajo.

Regla de la mano derecha, la punta de los dedos va en dirección del primer vector de la ecuación , en este caso la velocidad angular y se gira en sentido del segundo vector, que en este caso es r.

Aceleración

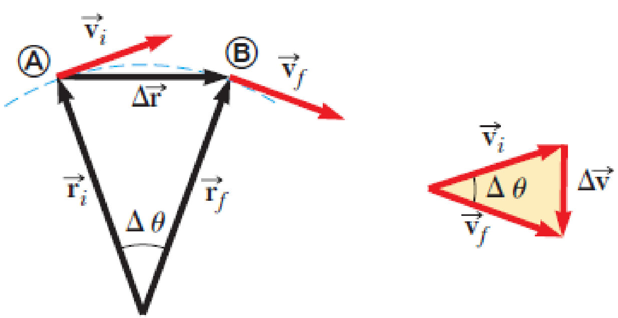


El módulo de $v_i = v_f = v$

El módulo de $r_i = r_f = r$

Los dos triángulos que se forman comparten el mismo ángulo $\Delta\theta$, por lo tanto tenemos que

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$

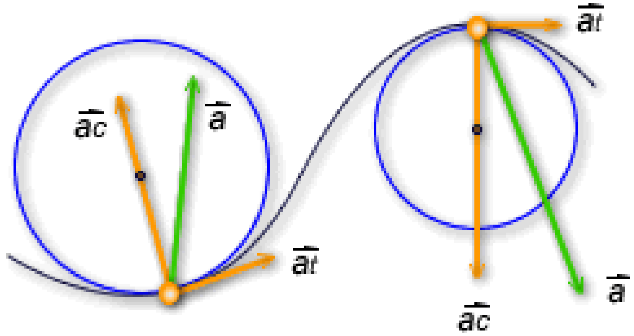


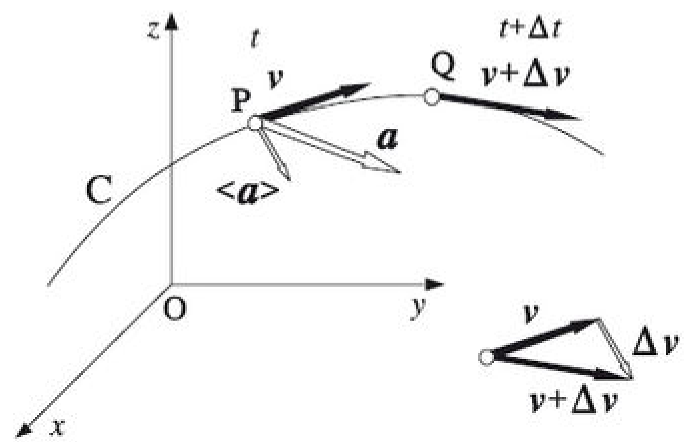
$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\,\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}$$

Por lo tanto esta aceleración cambia la dirección de la velocidad tangencial

Aceleración





La aceleración neta como podemos ver en la figura es la suma de una aceleración tangencial con una normal.

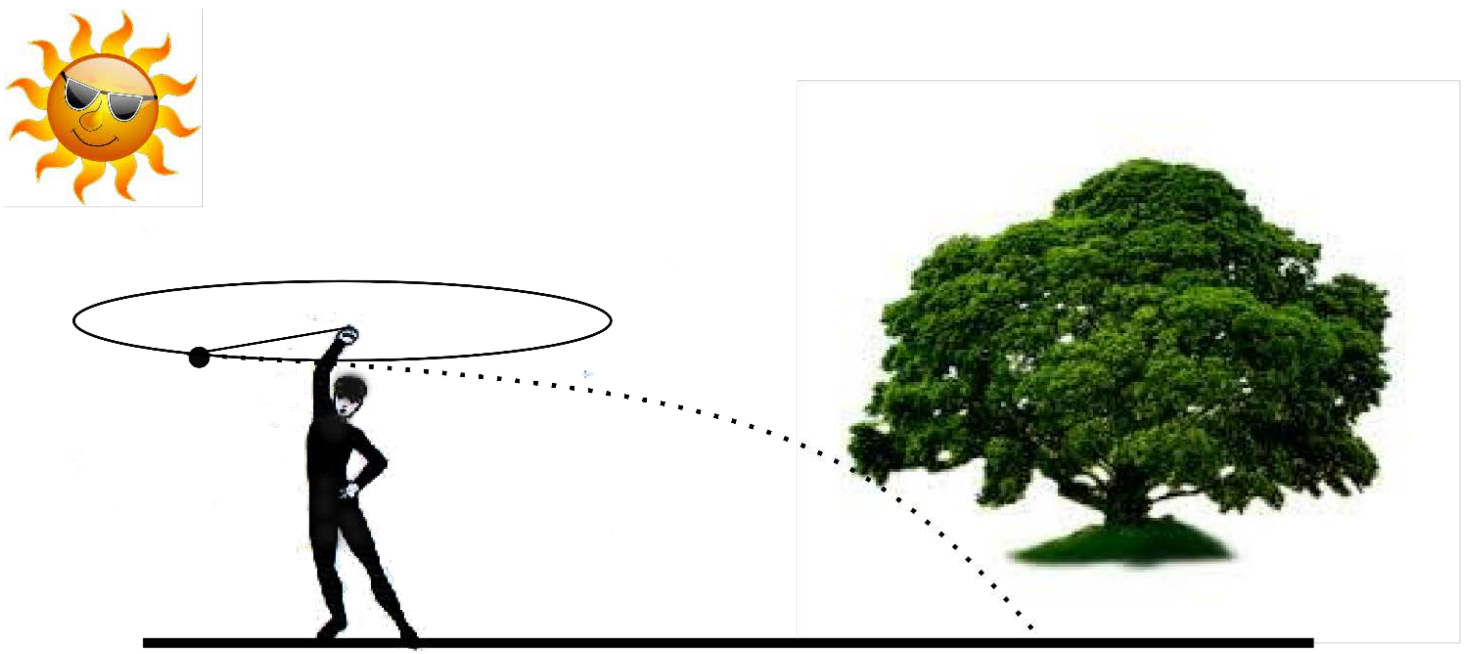
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_N = \frac{\Delta v_t}{\Delta t}\widehat{\boldsymbol{u_t}} - \frac{v_t^2}{r}\widehat{\boldsymbol{u_r}}$$

$$\overrightarrow{|a|} = \sqrt{a_t^2 + a_t^2} = \sqrt{\left\{\frac{\Delta v_t}{\Delta t}\right\}^2 + \left\{\frac{v_t^2}{r}\right\}^2}$$

A la aceleración normal, se le conoce también como aceleración centrípeta

Problema Inicial

Un estudiante toma una piedra de masa “m”, la ata a un cordel de longitud “L” y la hace girar entorno a él. Si en un instante “t”, se suelta la piedra. ¿a qué distancia de donde se ubica el estudiante cae finalmente la piedra?



Resolución

En primer lugar necesitamos calcular la rapidez de salida de la piedra, que en realidad será la rapidez en el eje x del movimiento parabólico que describe la piedra hasta tocar el suelo.

$$v_t = r\,\omega$$

vamos a suponer que el periodo es de $1[s]$

$$v_t = \frac{2\pi r}{T}$$

luego vamos a calcular el alcance máximo, porque la distancia a la que cae es la mitad, pues el punto de salida es la altura máxima.

$$R = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

por lo tanto necesitamos calcular el ángulo con el cual salió y la rapidez inicial para ello como sabemos la altura podemos saber la rapidez con la que llega en el eje y

$$v_{fy}^2 - v_{iy}^2 = 2gh$$

entonces la rapidez inicial en el eje y es cero luego

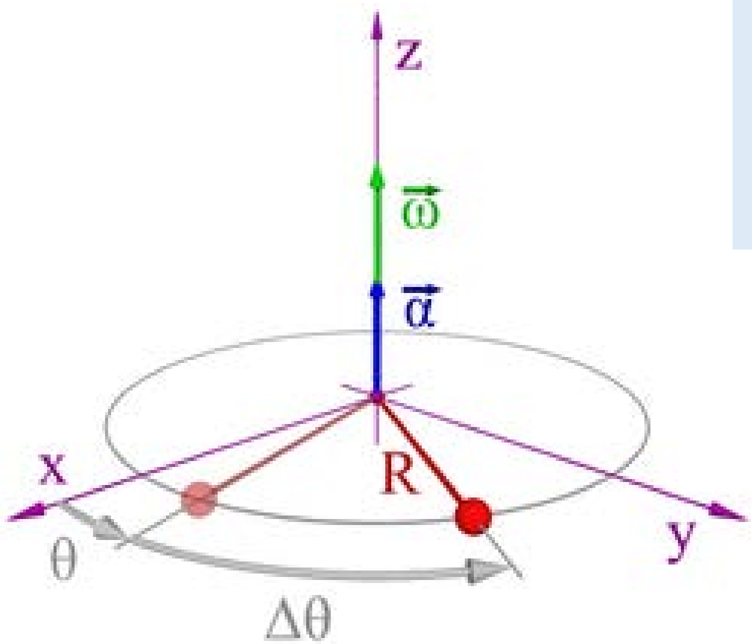
$$v_{fy} = \sqrt{2gh}$$

como la rapidez de salida es la misma que la de llegada, cuando la altura es igual, cambiando sólo la dirección

$$\theta = tg^{-1}\frac{v_{fy}}{v_{ix}}$$

tenemos el águlo entonces de salida, que es el mismo de llegada y también la rapidez inicial, entonces podemos sacar R, dividirlo por 2 y tenemos el resultado.

Aceleración Angular



Cuando la velocidad angular cambia en magnitud, entonces, tenemos una aceleración angular que podemos definir como

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La figura muestra como para un mismo intervalo de tiempo, el ángulo recorrido no es constante, sino que puede aumentar o disminuir, dependiendo si la diferencia $\Delta\omega$ es positiva o negativa

Ecuaciones MRUA
de un cuerpo rígido

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Cantidades traslacionales y angulares

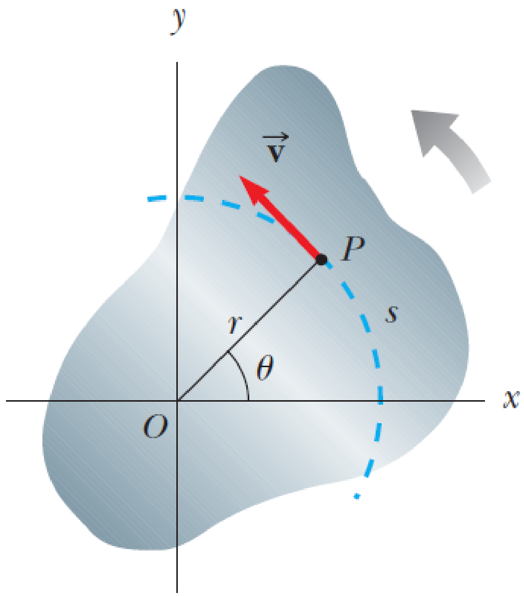


Figura 10.4 A medida que un objeto rígido da vueltas en torno al eje fijo a través de O, el punto P tiene una velocidad tangencial $\vec{\mathbf{v}}$ que siempre es tangente a la trayectoria circular de radio r.

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{v = r\omega}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

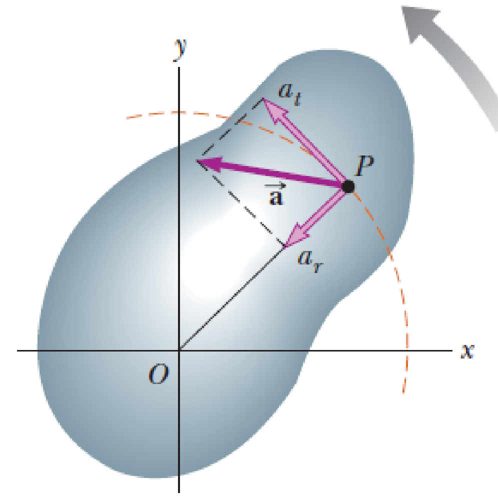
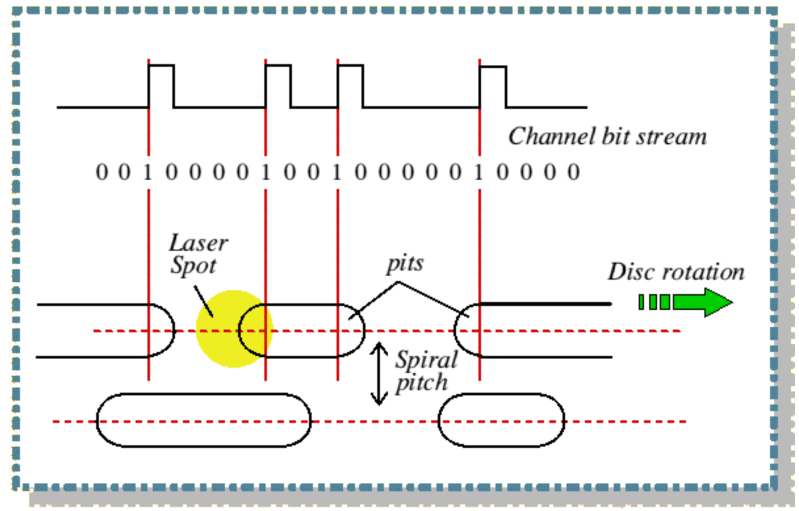


Figura 10.5 A medida que un objeto rígido gira respecto a un eje fijo a través de O, el punto P experimenta una componente tangencial de aceleración traslacional a_t y una componente radial de aceleración traslacional a_r. La aceleración traslacional de este punto es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_r$.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Aplicación I

En un disco compacto, la información de audio se almacena digitalmente en una serie de depresiones (pits) y áreas planas en la superficie del disco. Las alternaciones entre depresiones y áreas planas sobre la superficie representan unos y ceros binarios a leer por el reproductor de CD y convertir de regreso en ondas sonoras. Las depresiones y áreas planas se detectan mediante un sistema que consiste de un láser y lentes. La longitud de una cadena de unos y ceros que representa una porción de información es la misma en cualquier parte del disco, ya sea que la información este cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior.



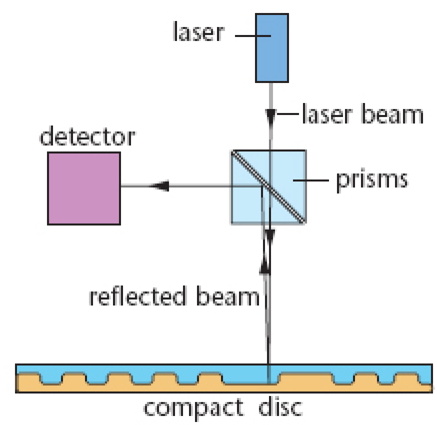
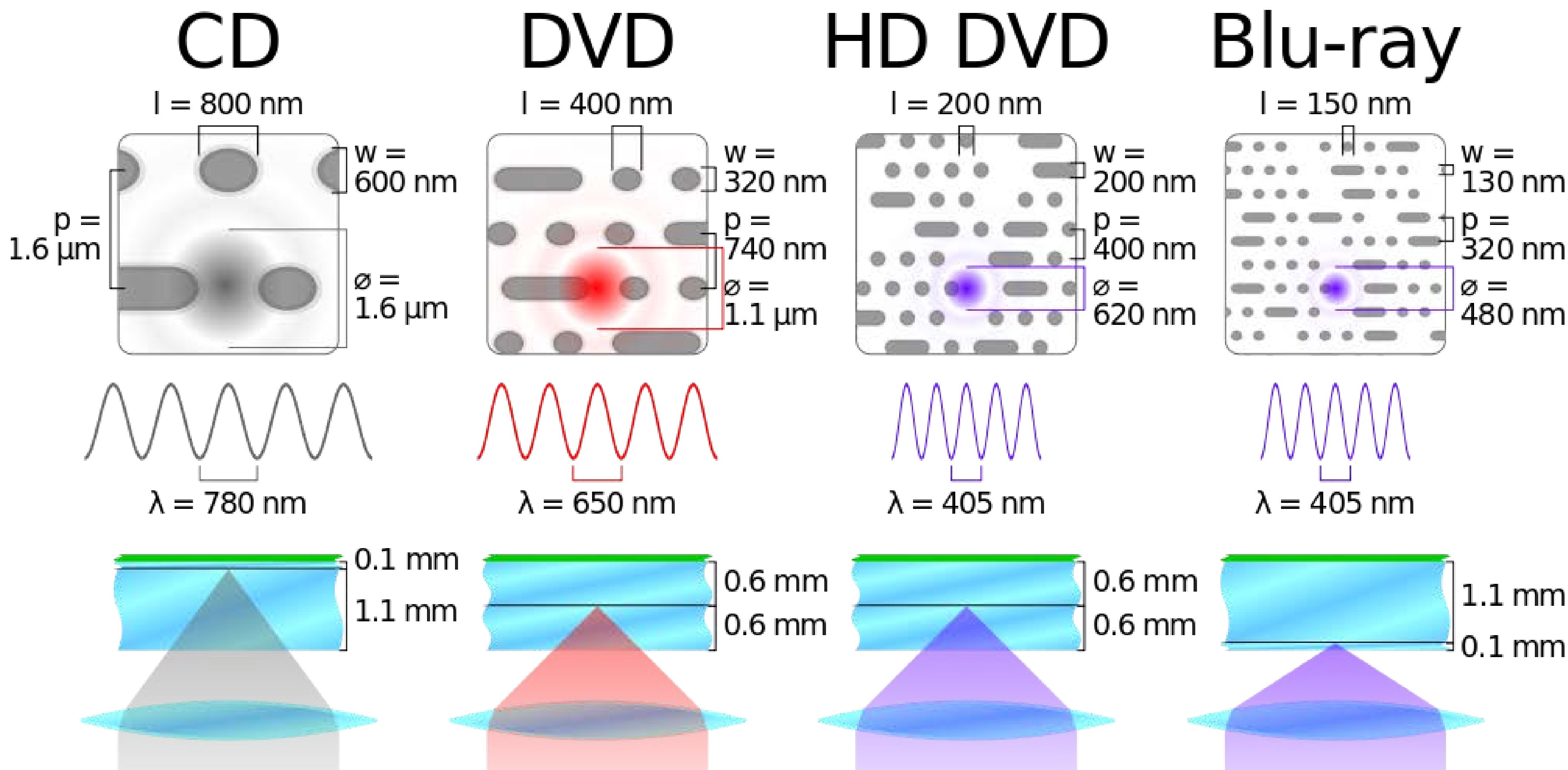


Fig. 12.8 A laser is used to play a CD.

Aplicación I

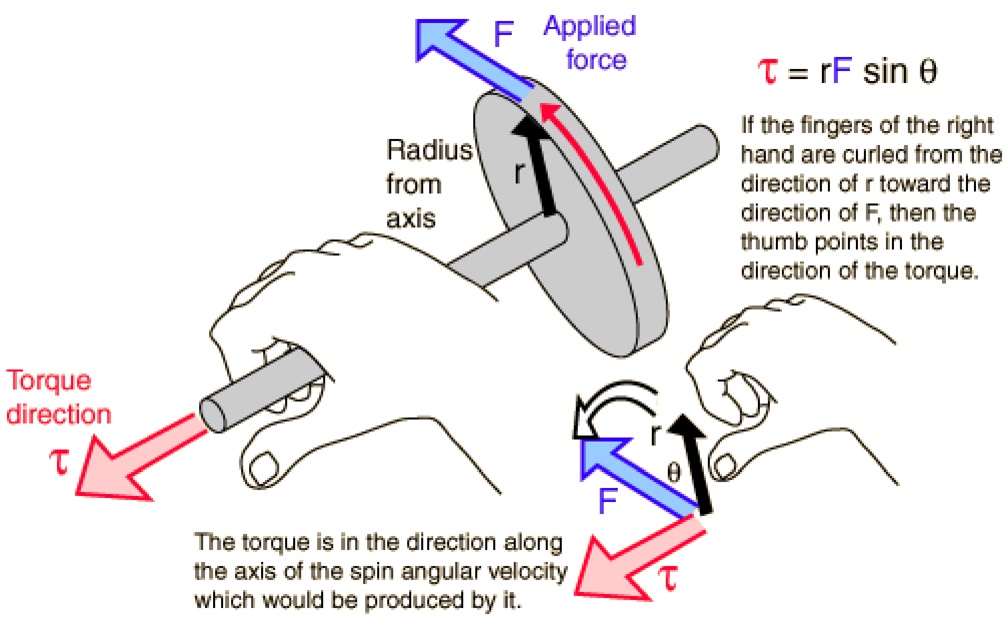


Aplicación I

De modo que, para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema laser–lente en el mismo intervalo de tiempo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la posición del lente debe ser constante. De acuerdo con las ecuaciones estudiadas, la rapidez angular debe variar a medida que el sistema laser–lente se mueve radialmente a lo largo del disco.
En un reproductor de CD común, la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema laser–lente es 1.3 m/s.

Encuentre la rapidez angular del disco en revoluciones por minuto cuando la información se lee desde la primera pista más interna (r =23 mm) y la pista final más externa (r =58 mm).
El máximo tiempo de reproducción de un disco de música estándar es 74 min y 33 s. ¿Cuantas revoluciones realiza el disco durante dicho tiempo?

Aceleración Angular



En este caso el par

$$\tau = Fr = I\alpha$$

actúa para acelerar la rotación, dando $\Delta\omega$ en la dirección mostrada. Como

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

se sigue que el vector del par también está en la dirección del eje.