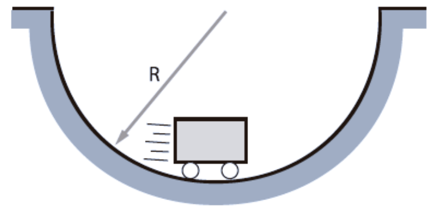
Movimiento circunferencial uniforme y dinámica rotacional

Guía de ejercicios

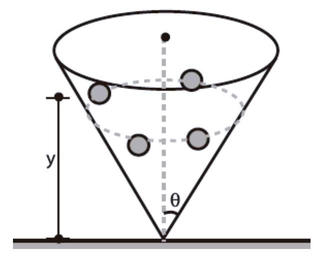
Dinámica Rotacional

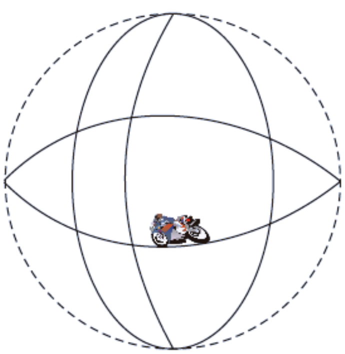
1. Un carrito de masa “m” se desplaza con una velocidad “v” sobre una pista cóncava de radio “R” como se muestra en la figura. Determinar la fuerza que ejerce el carrito sobre la pista en el punto más bajo (g es la aceleración de la gravedad).



2. A un vaso con aceite se le hace describir un movimiento circular uniforme, mediante un hilo de *2,5 m* de longitud. El movimiento se realiza en un plano vertical. Calcular la velocidad angular mínima con la que debe girar el vaso para que no caiga el aceite ($g = 10\ m/s^2$).

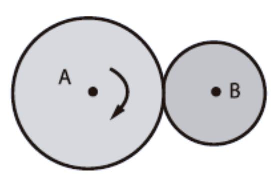
3. Una esferita rueda con una velocidad “v” a lo largo de una circunferencia horizontal dentro de un cono hueco, tal como se muestra. Determinar “v” en función de “y”.



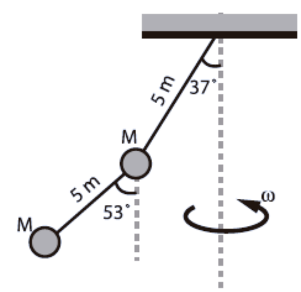


4. Un motociclista efectúa un movimiento circular muy peligroso, con un radio de *4 metros*. ¿ Cuál debe ser su velocidad mínima que debe tener para no caer? El coeficiente de fricción entre las llantas y la pista es *0,5* ($g = 10\ m/s^2$).

5. En la figura, “A” es una rueda motriz de *4 m* de radio,”B” es una rueda movida por fricción y tiene un radio de *0,5 m*. En qué relación están sus aceleraciones centrípetas? $a_{cp\,(A)} / a_{cp\,(B)} = ??$



6. Un péndulo doble gira alrededor del eje vertical, de manera que los hilos yacen en un mismo plano y forma con la vertical, ángulos constantes de 37^o y 53^o. Las longitudes de los hilos son iguales a $5\ m$ ¿Cuál es la velocidad angular de rotación del péndulo?

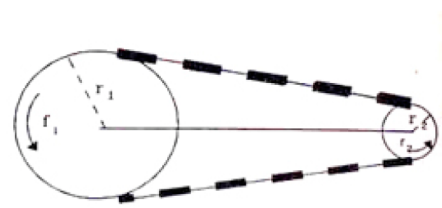


CINEMÁTICA ROTACIONAL

7. La Figura muestra dos ruedas de radios r_1 y r_2, las cuales están unidas por una correa de transmisión inextensible. Los ejes de las ruedas permanecen fijos.

    a. Compare las velocidades angulares y tangenciales de ambas ruedas.

    b. Si la rotación de las ruedas es uniforme, encuentre una relación entre las frecuencias f_1 y f_2, y los radios r_1 y r_2.



8. Un disco de *8 cm* de radio da vueltas con una rapidez constante de *1.200 rev/min* en torno a su eje central. Determine:

    a. Su rapidez angular

    b. La rapidez tangencial en un punto a *3 cm* de su centro

    c. La aceleración tangencial de un punto sobre el borde

    d. La distancia total que recorre en *2 s* un punto del borde.

9. Un motor eléctrico hace girar una rueda de molino a *1000 rev/ min* se apaga repentinamente. Después la rueda se mueve con aceleración angular negativa constante de $2\ rad/s^2$ de magnitud.

    a. ¿Durante qué intervalo de tiempo la rueda llega al reposo?

    b. ¿Cuántos radianes gira mientras va frenando?

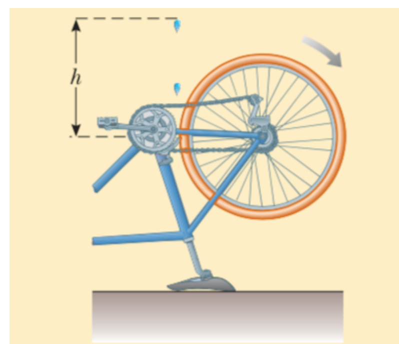
10. Un rueda giratoria requiere *3 s* para dar vueltas *37 revoluciones.* Si la rapidez angular al final del intervalo de tiempo de *3 s* es *98 rad/s*. ¿Cuál es la aceleración angular constante de la rueda?

11. Una centrífuga en un laboratorio médico da vueltas a una rapidez angular de *3.600 rev/min.* Cuando se paga da vueltas a *50 revoluciones* antes de llegar al reposo. Encuentre la aceleración angular constante de la centrífuga.

PROBLEMAS DESAFIO

12. Un carrusel está estable. Un perro corre sobre el suelo justo afuera de la circunferencia del carrusel, y se mueve con una rapidez angular constante de *0,75 rad/s*. El perro no cambia su ritmo cuando ve lo que ha estado buscando: un hueso que descansa en el borde del carrusel a un tercio de revolución enfrente de él. En el instante en que el perro ve el hueso ($t=0$), el carrusel comienza a moverse en la dirección que corre el animal, con una acelración angular constante igual a $0{,}015\ rad/s^2$. Determine
    a. En qué tiempo el perro alcanzará el hueso?
    b. El confundido perro sigue corriendo y pasa el hueso. ¿Cuánto tiempo después de que el carrusel comienza a girar el peroo y el hueso se emparejan por segunda vez?

13. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta pinchada. Una amiga gira la otra rueda, de *0,381 m* de radio, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven de manera vertical como muestra la figura. Una gota que salta de la llanta en una vuelta alcanza $h=54{,}0\ cm$ sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente se eleva *51,0 cm* sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda, A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.



fisic

Respuestas

1) La fuerza que ejerce el carrito es igual a la que ejerce la pista sobre el carro, su valor es

$$F_N = mg + \frac{mv^2}{r}$$

2) Para que la tensión sea mínima debe valer cero, entonces la parte más alta $mg = mr\omega^2$

$$\omega = 2\ rad / s$$

3) $v = \sqrt{gy}$

4) v=8,94 m/s

5) 1/8

6) $\omega = 1,38\ rad / s$

7) En este problema las velocidades tangenciales de 1 y 2 son iguales, entonces

$$v_{t1} = v_{t2}$$
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Y en término de las frecuencias tenemos

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$
$$r_1 2\pi f_1 = r_2 2\pi f_2$$
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_2}{f_1}$$

8) Primero hacemos las correspondientes transformaciones, de manera que:

$$r = 8cm$$
$$f = 1200\frac{rev}{\min} = 20\frac{rev}{s}$$
$$a)\ \omega = 2\pi f = 40\pi\frac{rad}{s}$$

$b)$ La rapidez tangencial a 3 cm del centro es

$$v_t = r\omega = 3cm \cdot 40\pi\frac{rad}{s} = 120\pi\frac{cm}{s} = 1,2\frac{m}{s}$$
$$c)\ a_{tg} = r\omega^2 = 0,08m\left(40\pi\ \ rad / s\right)^2 = 1.262\frac{m}{s}$$

$d)$ $\Delta s = r\Delta\theta$,pero la variación angular la podemos calcular como

$$\theta_f = \theta_o + \omega\Delta t$$
$$\theta_f = \omega\Delta t = 40\pi\frac{rad}{s}\cdot 2s = 80\pi\, rad$$

reemplazamos en la ecuación

$$\Delta s = 8cm \cdot 80\pi\, rad = 640\pi\, cm = 6,4\pi\, m$$
$$\Delta s = 20,096\, m$$

9) El motor al estar girando, tiene entonces asociada una velocidad angular inicial que la podemos calcular a partir de la frecuencia de giro del molino.

$$f_o = 1000\frac{rev}{\min} = 16,67\ \frac{rev}{\min}$$
$$\omega_o = 2\pi f = 104,68\frac{rad}{s}$$
$$\omega_f = 0\frac{rad}{s}$$

Ahora vamos a calcular el tiempo que demora en llegar a cero la velocidad angular, sabiendo que la aceleración angular es de $2\frac{rad}{s^2}$.

$$\omega_f = \omega_o - \alpha t$$
$$t = \frac{\omega_f - \omega_o}{^{-}\alpha} = \frac{0 - 104,68\ rad / s}{-2\ rad / s^2} = 52,34s$$

Para saber cuántos radianes gira, calculamos la posición angular suponiendo que cuando se inicia el corte de luz, el ángulo inicial es 0 rad.

$$\theta_f = \theta_o + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\theta_f = 104,68\frac{rad}{s}\cdot 52,34s - \frac{1}{2}2\frac{rad}{s^2}(52,34s)^2$$
$$\theta_f = 2739,47\, rad = 426,22 \text{ vueltas}$$

Finalmente gira 2739,47 rad mientras va desacelerando y llega finalmente a una rapidez angular de 0 rad/s.

10) Supondremos en este problema que la velocidad inicial es cero, luego tenemos que

$$\theta_f = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\alpha = \frac{2(\theta_f - \omega_o t)}{t^2}$$
$$\omega_f = \omega_o + \alpha t$$

Resolvemos el sistema de ecuación formado por las dos ultimas expresiones, donde no conocemos ni la rapidez angular inicial, ni tampoco la aceleración.

$$\alpha = \frac{2(\theta_f - \omega_o t)}{t^2}$$
$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$$
$$\frac{2(\theta_f - \omega_o t)}{t^2} = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$$
$$2\theta_f - 2\omega_o t = t(\omega_f - \omega_o)$$
$$2\theta_f - t\omega_f = 2\omega_o t - \omega_o t$$
$$\omega_o = \frac{2\theta_f - t\omega_f}{t} = \frac{(2 \cdot 37 \cdot 2\pi) - 3 \cdot 98}{3}$$
$$\omega_o = 56{,}91 rad/s$$
$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t} = \frac{98 - 56{,}91}{3} = 13{,}70 rad/s^2$$

11) Al apagarse la centrífuga, entonces esta disminuirá su rapidez angular. Calculamos la aceleración angular.

$$f_o = 3600\frac{rev}{min} = 60\frac{rev}{s}$$
$$\omega_o = 2\pi f_o = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 120\pi \frac{rad}{s}$$
$$\omega_f{}^2 - \omega_o{}^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$\alpha = \frac{\omega_f{}^2 - \omega_o{}^2}{2\Delta\theta} = \frac{0 - (120\pi)^2}{2 \cdot 50 \cdot 2\pi} = 226{,}08 rad/s^2$$

12) La rapidez angular del perro es 0,75 rad/s y la posición angular inicial 1/3 de una revolución, por otro lado, la aceleración del carrusel es 0,015 rad/s². Entonces para el cálculo del tiempo, perro y hueso tendrán la misma posición angular. Para ello igualaremos la ecuación de la posición para el perro (MCU) y la del carrusel (MCUA).

$$\theta_f = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{para el carrusel}$$
$$\theta_f = \theta_o + \omega t \quad \text{para el perro}$$
$$\theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \theta_o + \omega t$$

Pero la rapidez angular del carrusel es cero y el ángulo inicial donde se encuentra el perro es cero. Considerando esto y además que tenemos $\theta_o = \frac{1}{3} 2\pi = \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega t$$
$$2{,}09 + 0{,}0075t^2 = 0{,}75t$$
$$0{,}0075t^2 - 0{,}75t + 2{,}09 = 0$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{0{,}75^2 - 4 \cdot 0{,}0075 \cdot 2{,}09}}{2 \cdot 0{,}0075}$$
$$t = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{0{,}4998}}{0{,}015} =$$
$$t_1 = 97{,}13 s$$
$$t_2 = 2{,}87 s$$

De esta manera el perro podría alcanzar el hueso luego de 2,87 segundos y si sigue corriendo podría ser luego de 97,13 s

13) En este problema el radio de la rueda es de 0,381 m. La altura a la que llega la gota de agua tiende directa relación con la velocidad de salida de la rueda. Con esta relación podemos calcular la rapidez tangencial para cada vez que se lanza la gota de agua y con ello la aceleración de la rueda.

Entonces para la altura máxima tenemos

$$v_f{}^2 - v_o{}^2 = -2gh$$
$$v_o^2 = 2gh$$
$$v_o = \sqrt{2gh}$$
$$v_o = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}54}$$
$$v_0 = 3{,}25 m/s$$

Luego la otra velocidad, para cuando alcanza una altura de 51 cm es:

$$v_f{}^2 - v_o{}^2 = -2gh$$
$$v_o^2 = 2gh$$
$$v_o = \sqrt{2gh}$$
$$v_o = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}51}$$
$$v_0 = 3{,}16 m/s$$

De esta manera usando la ecuación que no tiene tiempo, calculamos la aceleración necesaria para hacer variar la velocidad en las cantidades anteriores, tomando en consideración que la rueda da una vuelta, y por tanto recorre un perímetro de la ciercunferencia.

$$v_f{}^2 - v_o^2 = 2a\Delta s$$
$$a = \frac{v_f{}^2 - v_o^2}{2\Delta s}, \text{ donde } \Delta s = 2\pi r$$
$$a = \frac{3{,}25^2 - 3{,}16^2}{2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}881} = 0{,}052 m/s^2$$