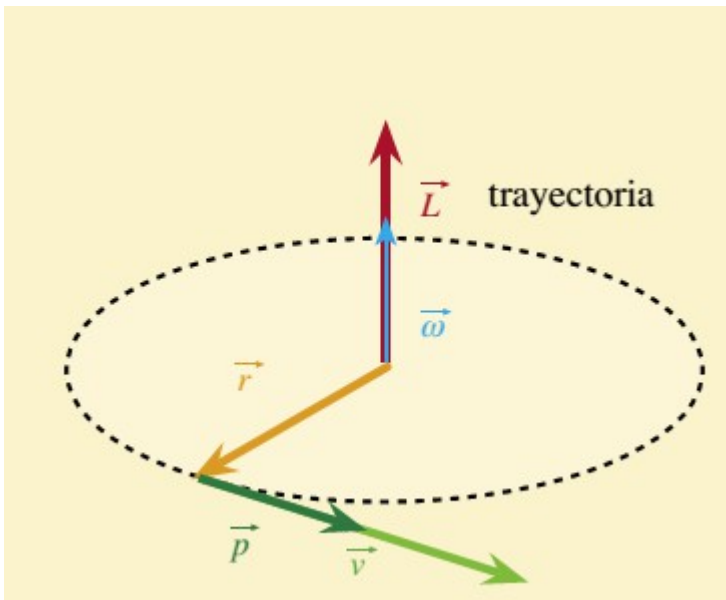
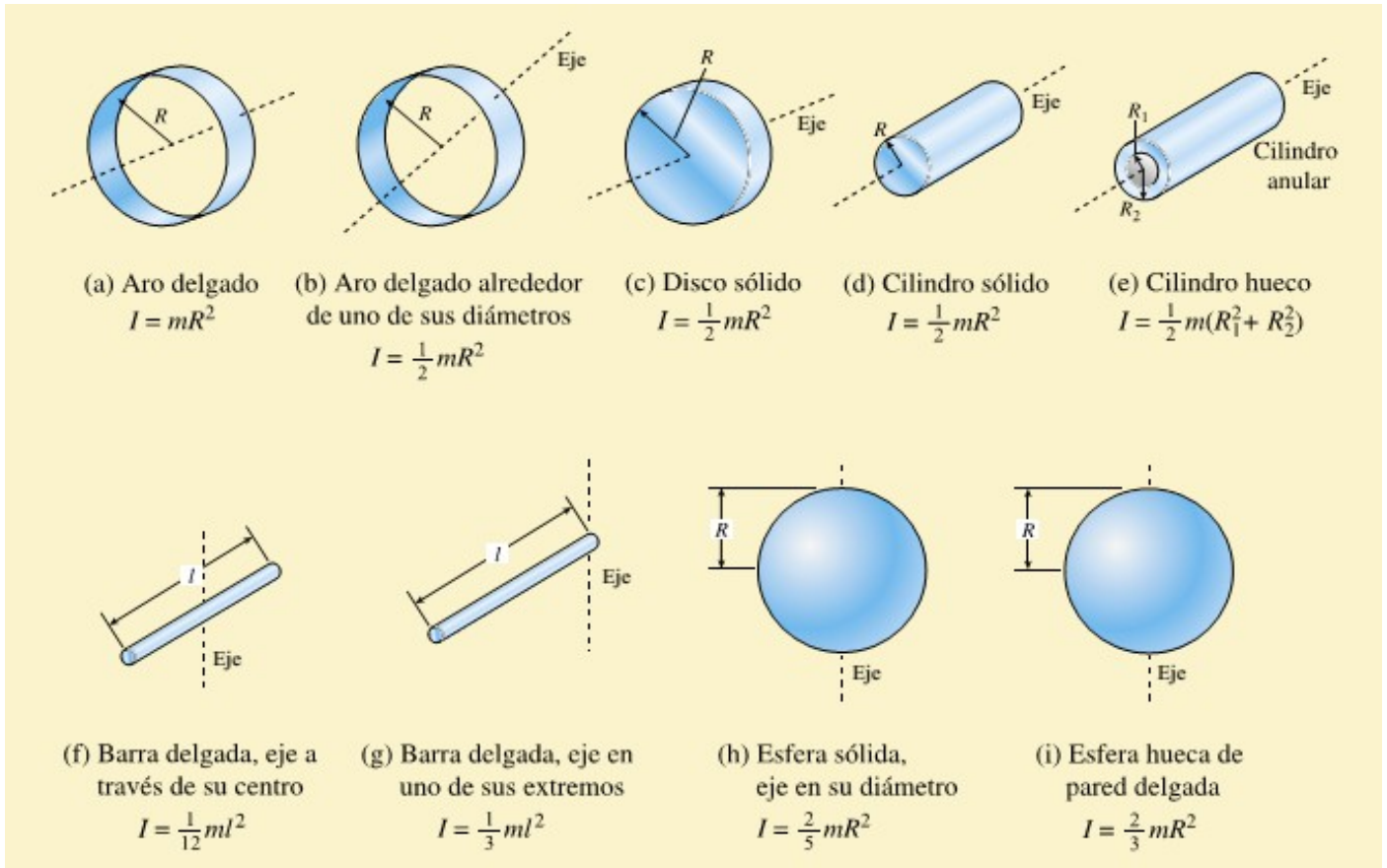


FORMULARIO

$$\begin{aligned}
 P &= mv & F &= \frac{\Delta P}{\Delta t} & \text{momento de inercia para sistema de particulas} \\
 L &= I \omega & & & \\
 L &= r p \text{ sen } \theta & \tau &= \frac{\Delta L}{\Delta t} & \\
 \tau &= r F \text{ sen } \theta & & & \\
 & & I &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 &
 \end{aligned}$$

Momento de inercia para cuerpos rígidos con respecto a diferentes ejes de giro



En la figura se puede observar cuál es la distribución espacial de las cantidades físicas antes estudiadas. Recordemos que en las ecuaciones sólo trabajamos el módulo de los vectores, sin embargo al dibujar utilizamos a parte del módulo, la dirección y sentido.

Observe que:

- La dirección y sentido tanto del momento angular con la velocidad angular son iguales, aunque su módulo puede diferir..
- La dirección y sentido tanto del momento lineal y de la velocidad tangencial son iguales, pero su módulo puede diferir.
- Si nos damos cuenta el vector r , o en

realidad el módulo de r , conecta lo lineal con lo angular.



I- Complete el cuadro según corresponda

| Símbolo | Nombre | Unidad SI | Unidades Fundamentales | Tipo de Magnitud |
|---------|------------------------|-------------|------------------------|------------------|
| | Momento lineal | | | |
| | Momento angular | | | |
| | Rapidez angular | | | |
| | Velocidad tangencial | | | |
| | Aceleración centrípeta | | | |
| τ | Torque | $N \cdot m$ | $Kg \ m^2 / s^2$ | vectorial |
| | Momento de una fuerza | | | |
| | Momento de inercia | | | |
| | Velocidad angular | | | |
| | Centro de giro | | | |
| | Periodo | | | |
| | Frecuencia | | | |
| | Aceleración angular | | | |
| | | | | |

TIPS

*El sentido del torque, del momento angular y de la velocidad angular se calculan con la regla de mano derecha.

* Sentido anti-horario positivo. Sentido horario negativo.

* El torque, el momento angular, la velocidad angular y la aceleración angular tienen su dirección en el eje de giro

- 1) Cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a cero entonces podemos asegurar que el cuerpo:
 - I) Está en reposo.
 - II) Se mueve con velocidad constante.
 - III) Está en equilibrio traslacional.
 - a) Sólo I
 - b) Sólo II
 - c) Sólo III
 - d) Sólo I y II
 - e) Sólo I, II y III
- 2) Con respecto a la conservación del momento angular se afirma:
 - I) Se conserva sólo si la sumatoria de torques externos es cero.
 - II) Se conserva sólo si la sumatoria de fuerzas externas es cero
 - III) Si la masa del cuerpo no cambia.Es(son) correcta(s)
 - a) Sólo I
 - b) Sólo II
 - c) Sólo III
 - d) Sólo I y II
 - e) Sólo II y III

- 3) Según el convenio el torque es positivo cuando...
- La fuerza se aplica en sentido antihorario
 - La fuerza se aplica en sentido horario
 - La fuerza se aplica se manera perpendicular al brazo
 - La fuerza se aplica en la misma dirección que el brazo
 - Ninguna de las anteriores
- 4) ¿Cuál es el módulo del momento angular de una silla coladora de 100 kg que gira en un juego de fantasilandia con un radio de 5 m una rapidez angular de 10 rad/s?
- $5 \times 10^3 \text{ kg m}^2/\text{s}$
 - $25 \text{ kg m}^2/\text{s}$
 - $50 \times 10^3 \text{ kg m}^2/\text{s}$
 - $25 \times 10^3 \text{ kg m}^2/\text{s}$
 - Ninguna de las anteriores
- 5) Una estrella de masa M y radio R colapsa súbitamente, formando una enana blanca de radio $10^{-4} R$. ¿Cuál es el nuevo periodo de rotación de la estrella si el periodo inicial era de 20 días? (Se puede suponer que la estrella es esférica, uniforme y no pierde masa en el proceso)
- 20×10^{-8} días
 - 20×10^{-6} días
 - 20×10^{-4} día
 - 20×10^{-3} días
 - Ninguna de las anteriores
- 6) ¿Cuál es el periodo T de rotación que tendría el año solar si la distancia Tierra-Sol fuera la mitad de lo que es?
- $T/2$
 - $T/4$
 - $2T$
 - $4T$
 - No se puede saber falta información
- 7) ¿Cuál es la rapidez angular de una bailarina que gira sobre si misma 30 veces en un minuto?
- $\pi / 2$ [rad/s]
 - π [rad/s]
 - $3 \pi / 2$ [rad/s]
 - $2 \pi / 3$ [rad/s]
 - Ninguna de las anteriores
- 8) Según la figura, los vectores correspondiente a cada número de manera creciente son:



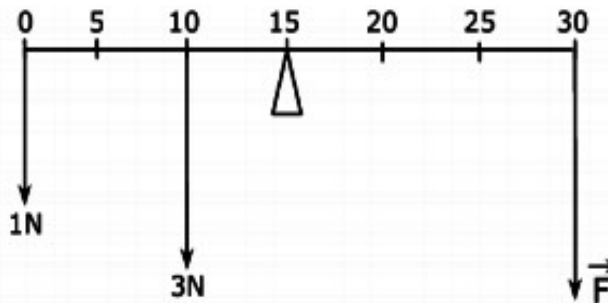
- Momento angular, radio y velocidad angular.
- Velocidad angular, radio, momento angular
- Momento angular, radio y momento lineal
- Momento lineal, radio y velocidad
- Velocidad tangencial, radio y velocidad angular.

- 9) Un cuerpo está en equilibrio
- Traslacional si se encuentra en estado inercial.
 - Rotacional si el torque resultante sobre él es nulo.
 - Traslacional si la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula.
- De estas afirmaciones es(son) verdadera(s)

- Sólo I
- Sólo I y II
- Sólo I y III
- Sólo II y III
- Sólo I, II y III

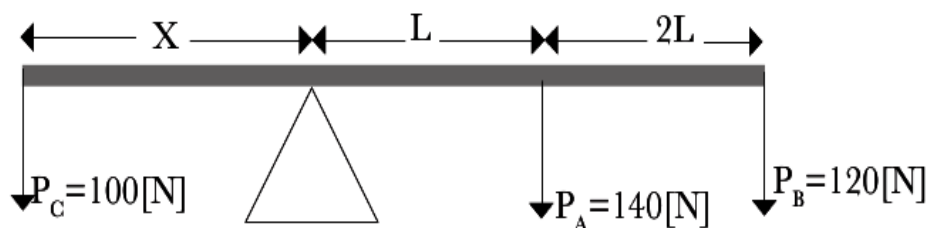
- 10) La figura muestra una regla de peso despreciable, en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas de módulo: 1N, 3N y F. ¿Cuál debe ser el valor de F para que el equilibrio sea posible?

- 1 N
- 2 N
- 2,5 N
- 3 N
- 5 N



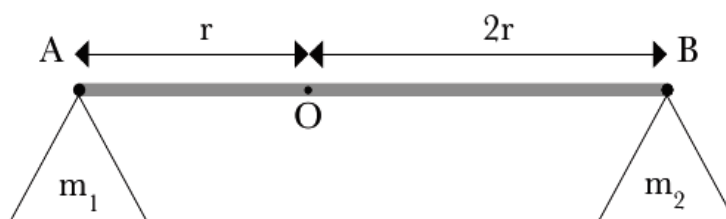
- 11) En un balancín tres niños: A, B y C se sitúan de tal manera que en cierto momento éste se equilibra horizontalmente debido a la acción de sus pesos ubicados a cierta distancia del eje de rotación. ¿Cuál es la distancia x a la que se encuentra el niño C?

- L
- 2L
- 3L
- 4L
- 5L



ENUNCIADO PARA LAS PREGUNTAS 12,13 y 14 .

La figura muestra una barra rígida que puede girar en torno a: O, A y B, según se indique. La relación entre las masas es $m_1 = 3m_2$. Se considera positivo el sentido horario de rotación.



12. El torque respecto al punto o es:

I. $\tau = gr(2m_2 - m_1)$

II. $\tau = -m_2 gr$

III. $\tau = -\frac{1}{3}m_1 gr$

- a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III d) Sólo I y II e) I, II y III

13. El torque respecto al punto A

I. $\tau = 3m_2 gr$

II. $\tau = m_1 gr$

III. $\tau = -3m_1 gr$

- a. Sólo I
b. Sólo II
c. Sólo III
d. Sólo I y II
e. I, II y III

14. El torque respecto al punto B es:

I. $\tau = -3m_1 gr$

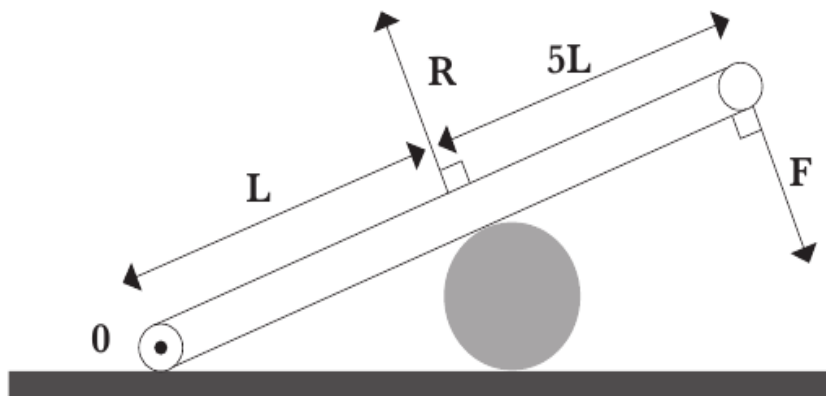
II. $\tau = -9m_2 gr$

III. $\tau = 9m_2 gr$

- a. Sólo I
b. Sólo II
c. Sólo III
d. Sólo I y II
e. Sólo I y III

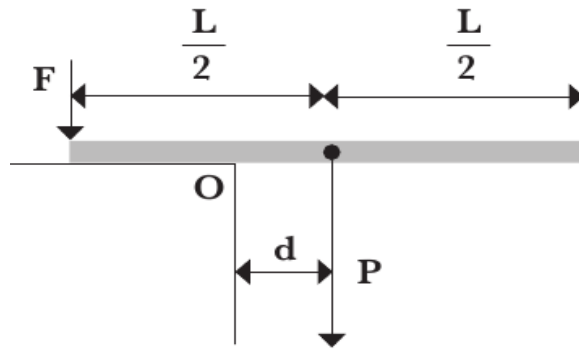
15. La palanca para moler nueces de la figura trabaja de tal forma que rota respecto al punto O, fijo al plano horizontal. ¿Cuál es la resistencia R que presenta la nuez si la fuerza F aplicada en el extremo de la prensa es de 10[N]?

- a. 5 N
b. 10 N
c. 30 N
d. 45 N
e. 60 N



16. Una regla está apoyada sobre el borde una mesa, de tal manera que se equilibra horizontalmente debido a la fuerza F y a su peso P , como muestra la figura. ¿Cuál es la expresión que determina la distancia d respecto a O para mantener la regla en equilibrio?

- a) $\frac{F \cdot L}{2(F - P)}$
- b) $\frac{F \cdot L}{2(F + P)}$
- c) $\frac{P \cdot L}{F - P}$
- d) $\frac{F \cdot L}{2F - P}$
- e) $\frac{F \cdot L}{2P}$

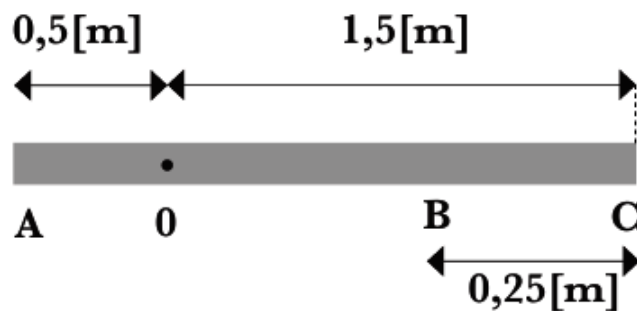


17. Respecto a la puerta giratoria de centro O de la figura, se puede afirmar que si se aplica una fuerza de:

- I. 5 [N] hacia arriba en A, su torque neto será de 2,5 [N·m] en sentido horario.
- II. 3 [N] hacia arriba en B y 3[N] hacia abajo en C, su torque neto será de 2,25 [N·m] en sentido antihorario.
- III. 5 [N] hacia abajo en A, 3 [N] hacia arriba en B y 10 [N] horizontales en C su torque neto será de 4,75 [N·m] en sentido antihorario.

Es (son) verdadera(s)

- a. Sólo I
- b. Sólo II
- c. Sólo III
- d. Sólo I y II
- e. Sólo I y III



18. En el caso de la puerta giratoria anterior, si el módulo del torque mínimo para producir la rotación es de 8[N·m], ¿con cuáles combinaciones se puede lograr la rotación de la puerta?

- I. 4[N] en A hacia arriba y 4[N] en C hacia abajo.
- II. 6[N] en A hacia abajo y 4[N] en C hacia arriba.
- III. 6[N] en A hacia arriba y 4[N] en C hacia arriba.

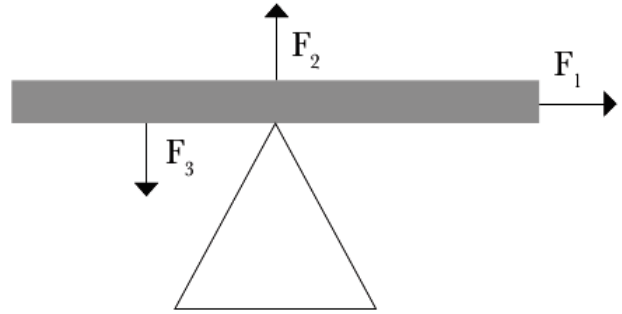
Es (son) verdadera(s)

- a. Sólo I
- b. Sólo II
- c. Sólo III
- d. Sólo I y II
- e. Sólo I y III

19. En el balancín de la figura producen torque las fuerzas:

- I. F_1
- II. F_2
- III. F_3

- a. Sólo I
- b. Sólo II
- c. Sólo III
- d. Sólo I y II
- e. I, II y III



20. Para analizar la conservación del momento angular, un estudiante realiza el siguiente ejercicio: se sienta en una silla de escritorio giratoria y extiende los brazos, sosteniendo en cada mano tres libros cuyo peso total es de 2 kg. Luego, se da un impulso que lo hace girar de modo que los libros en su mano alcanzan una rapidez lineal de 2 m/s y tienen un radio de giro de 70 cm. ¿Cuál es la rapidez lineal de los libros cuando el estudiante baja sus brazos hasta quedar con un radio de giro de 20 cm?

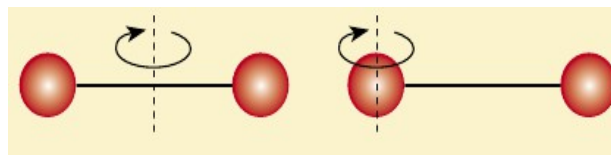
- a) 6 m/s b) 7 m/s c) 8 m/s d) 9 m/s e) Ninguna de las anteriores

21. Cuando se inicie el ciclo final del Sol, su radio aumentará hasta 200 veces, desde que comience su expansión hasta que alcance un tamaño máximo como una estrella gigante roja. Supongamos que inicialmente el Sol rota sobre su eje con rapidez angular inicial ω_i y su masa (M) permanece constante durante el proceso. ¿Cuál sería la rapidez angular del Sol cuando alcance su radio máximo?

- a. $\omega_0 / 20.000$
- b. $\omega_0 / 30.000$
- c. $\omega_0 / 40.0000$
- d. $\omega_0 / 50.000$
- e. Ninguna de las anteriores

22. Considera un cuerpo formado por dos masas esféricas de 5 kg cada una, conectadas entre sí por una barra rígida ligera de 1 m de largo, Despreciando la masa de la varilla:
¿Cuál es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a él?

- a) 2,5 Kg m^2
- b) 5 kg m^2
- c) 15 kg m^2
- d) 20 kg m^2
- e) Ninguna de las anteriores



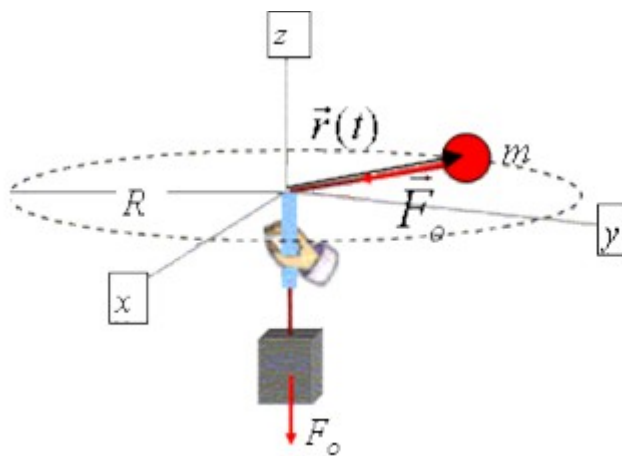
23. Según los datos del problema anterior ¿Cuál es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje que pasa por una de las esferas y es perpendicular a él?

- a) 5 kg m^2
- b) 10 kg m^2
- c) 15 kg m^2
- d) 0,5 kg m^2
- e) Ninguna de las anteriores

III- Resuelva los siguientes ejercicios sea secuencial en el desarrollo.

PROBLEMA I: (prueba año 2009) Un estudiante toma un tubo de un lápiz en desuso y lo atraviesa con un hilo. Luego amarra una goma de borrar de 80 gr en uno de sus extremos del hilo y la hace girar a 10 [rad/s] con un radio de 50 cm, mientras sostiene el otro extremo, como se muestra en la figura. Luego, le da un tirón a hilo de manera que el radio de giro disminuye a 20 cm.

- ¿Cuál es el módulo del momento angular inicial de la goma de borrar y el final?
- ¿Cuál es la rapidez angular de la goma cuando disminuye el radio de giro?



PROBLEMA II: (prueba año 2009) Tres niños de 20 kg, 45 kg, 60 kg juegan en un balancín de 3.6 m de largo y pivotado en el centro. Si los niños más pesados se estacionan uno en cada extremo y despreciando el peso del balancín, para producir equilibrio, el niño más liviano deberá ubicarse respecto del centro a una distancia de....

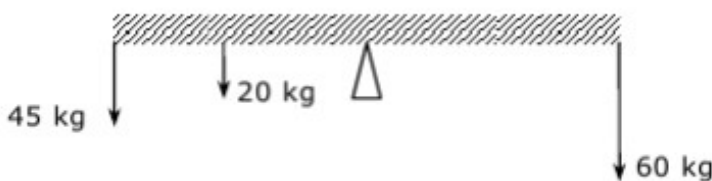
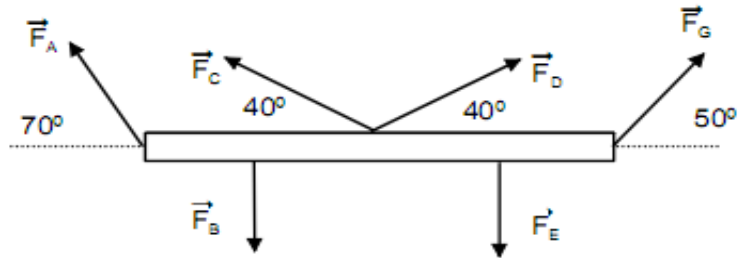


fig. 11

PROBLEMA III: (Desafío) Seis fuerzas actúan sobre una viga que forma parte de la estructura de un edificio, como se indica en la figura, en los extremos, punto medio y a un cuarto de la longitud de la viga. Se sabe que la resultante de todas ellas es cero y que $F_B = F_E = 5 \text{ kN}$, $F_C = 4 \text{ kN}$, $F_D = 2 \text{ kN}$. Determine las magnitudes de F_A y F_G .



PROBLEMA IV: Una fuerza tangencial de 200 N actúa sobre el perímetro de una rueda de 25 cm de radio. Encuéntrese: a) el torque, b) repítase el cálculo la fuerza forma un ángulo de 40° con respecto a un rayo de la rueda.
Solución a) 50 Nm, b) 32 Nm

PROBLEMA V: Cierta rueda de 8 kg tiene un radio de giro de 25 cm.

- ¿cuál es su momento de Inercia?
 - ¿de qué magnitud es el torque que se requiere para darle una aceleración angular de 3 rad/s^2 ?
- Solución a) $0,5 \text{ kg m}^2$, b) $1,5 \text{ N m}$*

PROBLEMA VI : Determínese el torque constante que debe aplicarse a un volante de 50 kg con un radio de giro de 40 cm, para darle una rapidez angular de 300 rpm en 10 s.
Solución 25 Nm

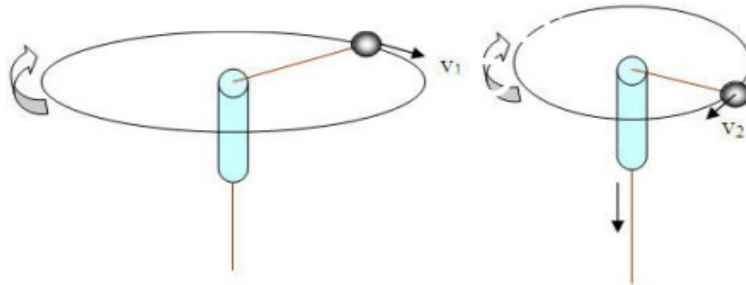
PROBLEMA VII: Una rueda de 4 kg y radio de giro de 20 cm está rotando a 360 rpm. El torque debido a la fuerza de fricción es de 0,12 Nm. Calcule el tiempo necesario para llevar a la rueda hasta el reposo.
Solución $t = 50,2 \text{ s}$

PROBLEMA VIII: Determínese la energía cinética rotacional de una rueda de 25 kg que se encuentra rotando a 6 rev/s, si su radio de giro es de 22 cm.
Solución $E_c = 860 \text{ J}$

PROBLEMA IX: Una cuerda de 3m de longitud está enrollada en el eje de una rueda. Se tira de la cuerda con una fuerza constante de 40 N. Cuando la cuerda termina de desenredarse, la rueda sigue girando a 2 rev/s. Determiné el momento de inercia de la rueda y del eje. Desprecie el roce.
Solución $I = 1,52 \text{ kgm}^2$

PROBLEMA X : Una rueda de 500 gr que tiene un momento de inercia de $0,015 \text{ kgm}^2$ se encuentra girando inicialmente a 30 rev/s. Alcanza el reposo después de 163 rev. ¿De qué magnitud es el torque que la va frenando?
Solución : $\tau = 0,26 \text{ N m}$

PROBLEMA XI : Una persona ata una piedra de masa m a un cordel de largo L . Si hace girar la piedra, en un plano horizontal, con cierta velocidad angular. Asumiendo que el cordel tiene una masa que se puede despreciar. Si la masa de la piedra se duplica, el largo de la cuerda disminuye a la mitad y la velocidad angular se duplica, ¿cómo son el momento de inercia, el momento angular y la energía cinética de rotación de la piedra, respecto a los valores que tenían antes de los cambios?
Solución Hoja final



PROBLEMA XII Se tiene una tabla rectangular, de lados $a = 0,2 \text{ m}$ y $b = 0,4 \text{ m}$, de masa $0,6 \text{ kg}$. Si gira respecto a un eje perpendicular al plano de la tabla y que pasa por su centro de masa (intersección de sus diagonales) con una velocidad angular de 10 rad/s .

$$I_{cm} = m(a^2 + b^2) / 12$$

- i) Determine su momento angular. I
- ii) Determine su energía cinética rotacional

Solución: i) $0,01 \text{ Kg m}^2$ ii) $0,5 \text{ Joule}$

PROBLEMA XIII.- Un tagadá es una de las entretenimientos que suele haber en un parque de diversiones. Y es, básicamente, un disco plano que gira en torno a un eje perpendicular al plano y que pasa por su centro; también tiene otros movimientos, pero para lo que se propondrá solo se hará la suposición que tiene un movimiento horizontal.

Suponga que el tagadá de la figura tiene un diámetro de 5 m. La masa del disco uniforme es de 500 kg, la masa de cada persona arriba de él es, en promedio, 60 kg y hay 20 en total. Las personas están en el borde del disco. El sistema completo se mueve a razón de 2 vueltas en 10 segundos. ¿Cómo se modificaría la velocidad del tagadá si 5 personas, simultáneamente, caminan y se ubican en el centro del disco?



PROBLEMA XIV: Se hace girar, en círculo horizontal, una pequeña pelota atada al extremo de una cuerda que pasa a través de un tubo que está vertical. Si se tira de la cuerda a través del tubo hacia abajo, ¿qué ocurre con la rapidez de la pelota? Si la pelota está inicialmente girando a razón de $2,8 \text{ m/s}$ describiendo una circunferencia de radio $0,3 \text{ m}$, ¿cuál será la rapidez tangencial de la pelota si se tira la cuerda hasta que el radio de la circunferencia se reduce a $0,15 \text{ m}$?



SOLUCIONES

PROBLEMA XI

$$\begin{aligned} m_1 &= m \\ R_1 &= R \\ \omega_1 &= \omega \\ m_2 &= 2m \\ R_2 &= R/2 \\ \omega_2 &= 2\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= m_1 R_1^2 = mR^2 \\ L_1 &= I_1 \omega_1 = mR^2 \omega \\ K_1 &= I_1 \omega_1^2 / 2 = mR^2 \omega^2 / 2 \end{aligned}$$

$I_2 = m_2 R_2^2 = 2m \times (R/2)^2 = 2mR^2/4 = mR^2/2 = (mR^2)/2 = I_1/2$, es decir, el momento de inercia disminuye a la mitad.
 $L_2 = I_2 \omega_2 = mR^2/2 \times 2\omega = mR^2 \omega = L_1$, es decir, el momento angular continua igual.
 $K_2 = I_2 \omega_2^2 / 2 = [mR^2/2 \times (2\omega)^2] / 2 = 4mR^2 \omega^2 / 2 = 2(mR^2 \omega^2 / 2) = 2K_1$, es decir, la energía cinética de rotación se duplica.

PROBLEMA XIII

Masa disco: $m_1 = 500 \text{ kg}$
 $R = 2,5 \text{ m}$

Masa personas, al inicio: $m_2 = 20 \times 60 \text{ kg} = 1.200 \text{ kg}$

$\omega_1 = 2 \text{ rps} = 2 \times 2\pi \text{ rad/s} = 12,56 \text{ rad/s}$

Por conservación del momento angular, se tiene:

$$L_1 = L_2 \\ (I_{\text{disco}} + I_{\text{personas1}})\omega_1 = (I_{\text{disco}} + I_{\text{personas2}})\omega_2$$

A las personas se les puede resumir como un anillo de radio R , debido a que se distribuyen en el borde del disco.

En segunda instancia las 5 personas que van al centro tendrán un radio 0 m , por lo tanto no influirán, pero sí lo harán las 15 personas que quedan en el borde.

Masa personas, al final: $m_3 = 15 \times 60 \text{ kg} = 900 \text{ kg}$

$$(m_1 R^2 + m_2 R^2 / 2) \omega_1 = (m_1 R^2 + m_3 R^2 / 2) \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{\left(m_1 R^2 + \frac{m_2 R^2}{2}\right) \omega_1}{m_1 R^2 + \frac{m_3 R^2}{2}} = \frac{\left(500 \text{ kg} \times (2,5 \text{ m})^2 + \frac{1.200 \text{ kg} \times (2,5 \text{ m})^2}{2}\right) 12,56 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{500 \text{ kg} \times (2,5 \text{ m})^2 + \frac{900 \text{ kg} \times (2,5 \text{ m})^2}{2}}$$

$$\omega_2 = 14,54 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Datos:
 $v_1 = 2,8 \text{ m/s}$
 $R_1 = 0,3 \text{ m}$
 $R_2 = 0,15 \text{ m}$

PROBLEMA XIV

$$v = \omega R \rightarrow \omega = v/R$$

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ I_1 \omega_1 &= I_2 \omega_2 \\ m R_1^2 v_1 / R_1 &= m R_2^2 v_2 / R_2 \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{R_1^2 v_1 R_2}{R_2^2} = \frac{R_1^2 v_1 R_2}{R_1 R_2^2} = \frac{R_1 v_1}{R_2} = \frac{0,3 \text{ m} \times 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,15 \text{ m}} = 5,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



SOLUCIONES DE LAS ALTERNATIVAS

| | | | |
|----|---|----|---|
| 1 | C | 15 | E |
| 2 | A | 16 | B |
| 3 | A | 17 | A |
| 4 | D | 18 | D |
| 5 | A | 19 | C |
| 6 | B | 20 | B |
| 7 | B | 21 | C |
| 8 | C | 22 | A |
| 9 | D | 23 | A |
| 10 | B | 24 | |
| 11 | E | | |
| 12 | E | | |
| 13 | D | | |
| 14 | D | | |