Profesor: David Valenzuela Z.
www.fisic.ch

Guía vectores II

A tener en consideración

Producto punto

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\,\theta \tag{2}$$

Cuando son perpendicular se cumple que el producto punto entre dos vectores es cero, luego

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0 \tag{3}$$

Si los vectores son paralelos, entonces las componentes son proporcionales cuando son distinto de cero.

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} \tag{4}$$

Ejemplo

Encontrar el ángulo entre el vector $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + p\hat{k}$ y $\vec{B} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ usando las relaciones 1 y 2.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\,\theta = 3(-2) + 6\cdot 3 + 9\cdot 1 = 21,$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2+6^2+9^2} = 3\sqrt{14},\ |\vec{B}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14},$$

$$3\sqrt{14}\sqrt{14}\,cos\,\theta = 21, \qquad cos\,\theta = \frac{1}{2}, \qquad \theta = 60^o$$

Producto cruz

El producto cruz de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ o también conocido como producto vectorial se escribe como $\vec{A}\times\vec{B}$. Supongamos que: $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{bmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{bmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{z} \tag{5}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{6}$$

Una definición geométrica del producto cruz, también cumple que:

$$|\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\,sen\,\theta \tag{7}$$

1. El cálculo del módulo corresponde al área del paralelógramo definido por ambos vectores, donde θ es el ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

2. $\vec{A}\times\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y lsa terna $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A}\times\vec{B})$

La geometría de los determinantes

Usando el producto vectorial podemos obtener una interpretación geométrica de los determinantes 2×2 y 3×3. Sean los vectores $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$ y $\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}$ dos vectores en el plano; $sin\,\theta$ es el ángulo entre ambos vectores, hemos visto que $|\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,sen\,\theta$ es el área del paralelógramo cuyos lados adyacentes son $\vec{A}$ y $\vec{b}$. El producto vectorial escrito como un determinante para este caso es:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_y & a_z & 0 \\ b_y & b_z & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k} \tag{8}$$

Por lo tanto, el área $|\vec{a}\times\vec{b}|$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=a_xb_y-a_yb_x \tag{9}$$

El signo del determinante es + cuando el ángulo que forman los vectores al girar en sentido contrario a las agujas del reloj es menor a π.

Ejemplo

Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(1,1),(0,2)$ y $(3,2)$.

Solución

Sean $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}, \vec{b}=2\hat{j}$ y $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}$. Es claro que el triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores $\vec{a}$,$\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen la misma área que el triángulo con vértice en $\vec{0}, \vec{b}-\vec{a}$ y $\vec{c}-\vec{a}$ como se muestra en la figura. De hecho, este último es simplemente una traslación del primero. Como el área del triángulo trasladado es la mitad del área del paralelógramo con lados adyacentes $\vec{b}-\vec{a}=-\hat{i}+\hat{j}$ y $\vec{c}-\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}$, tenemos que el área del triángulo con vértice en $(1,1),(0,2)y(3,2)$ es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{2} \tag{10}$$

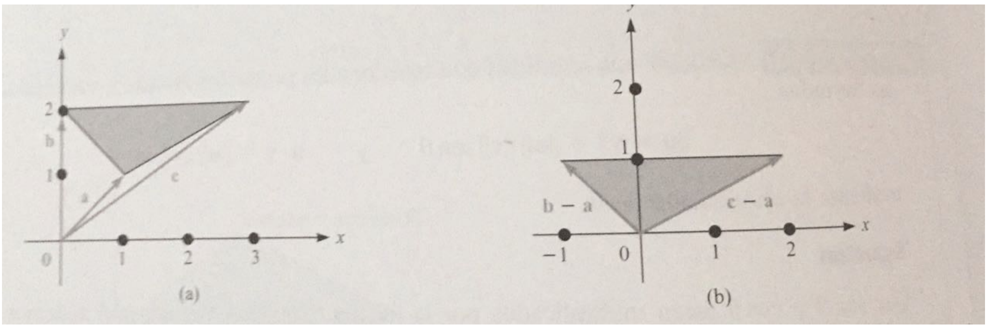

Figure 1: (a) Hallar el área A del triángulo sombreado expresando los lados como diferencias de vectores (b) para obtener $a = |(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|/2$.

Una interpretación de los determinantes de matrices 3×3 como volumen de paralelepípedo. Sea la matriz:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{11}$$

entonces los vectores

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k} \quad y \quad \vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k} \tag{12}$$

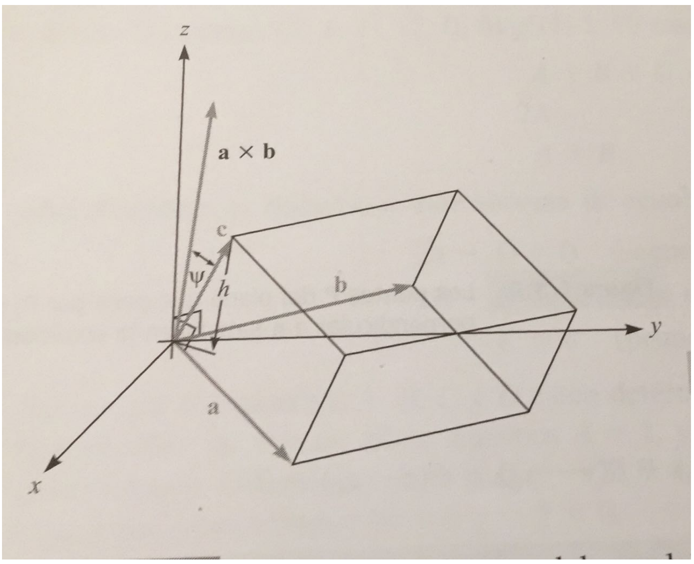

Figure 2: Volumen del paralelepípedo definido por **a**,**b**,**c** es el valor absoluto del determinante de la matriz de 3×3 cuyas filas son **a**, **b** y **c**.

Problemas

1. Comprobar que al intercambiar las dos primeras filas del determinante 3×3 de la matriz siguiente, cambia el signo del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Calcular los determinantes de las siguientes matrices

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$$

3. Hallar $(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}) \times (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$.

4. Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$, donde $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$.

5. Calcular $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, donde $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{c} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

6. Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{a} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$.

7. Calcular el área del paralelógramo definida por dos vectores $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{b} = -\hat{\imath} - \hat{k}$.

8. Hallar un vector unitario ortogonal (perpendicular) a los vectores $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ y $\vec{b} = \hat{\jmath} + \hat{k}$.

9. Hallar el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores $\hat{\imath} + 3\hat{k}$, $2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $5\hat{\imath} + 4\hat{k}$.

10. Hallar el área del paralelógramo que tiene por lados los vectores $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$

11. Un triángulo tiene vértices$(0, 0, 0)$;$(1, 1, 1)$ y $(0, 2, 3)$. Hallar su área.

12. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con lados $2\hat{\imath}$, $5\hat{\imath} - 3\hat{k}$ y $\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$?

Respuestas

1) una determinante da 8 y la otra -8 2) $2\sqrt{3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$ 4) $-3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}$ 5) $V = 11$
12) 10

References

[1] J. E. Marsden, "Cálculo Vectorial", Addison–Wesley, 2004.

[2] M.L Boas, "Mathematical Methods i the Physical Sciences“, Wiley-Sons, Inc.,2006.