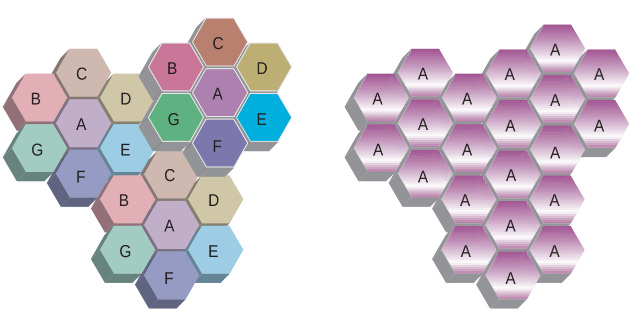
Juan M.R. Parrondo

Móviles y vectores

Termina el primer tiempo del partido en un gran estadio. En ese momento, miles de personas toman su teléfono móvil para llamar a casa o a algún amigo. Aunque en este tipo de situaciones las líneas suelen saturarse, son muchos los que consiguen llamar. ¿No se han preguntado nunca cómo es posible que la información proveniente de todos esos aparatitos pueda procesarse por separado? ¿Y cómo unas pocas antenas pueden distribuir a su vez información a todos ellos, de forma dirigida, específica y bastante rápida? Denle las gracias a las matemáticas. Más concretamente, a los vectores y matrices que tantos quebraderos de cabeza provocan en nuestros estudiantes de secundaria y de universidad.

En los comienzos de la telefonía móvil, la estrategia para que la estación base se pudiera comunicar con varios teléfonos al mismo tiempo fue asignar a cada uno de ellos una frecuencia o canal, como si se trataran de distintas cadenas radiofónicas. Este sistema de acceso múltiple por división de frecuencia (FDMA, acrónimo de Frequency Division Multiple Access) imperó en la telefonía móvil hasta los años noventa. Pero no utiliza el ancho de banda disponible de manera óptima. Entre otras razones porque, para evitar interferencias, cada antena o base no puede emplear todas las frecuencias disponibles. Las antenas de telefonía móvil se disponen formando una red aproximadamente hexagonal, como la que se muestra en la figura 1. Debido a posibles interferencias, una celda no puede utilizar las mismas frecuencias que sus vecinas, lo cual obliga a una cuidadosa planificación de las frecuencias asignadas a cada celda, como vemos en la figura 1 (*derecha*). Las celdas con distintas letras emplearán frecuencias diferentes; así, cada una de ellas hará uso sólo de un séptimo del ancho de banda disponible, con la pérdida consiguiente de capacidad para toda la red.

La segunda generación de telefonía móvil se basó en el sistema de acceso múltiple por división de tiempo, TDMA (de Time Division Multiple Access). En este sistema no sólo se divide el espectro de frecuencias, sino también el tiempo. En cada canal habla más de un usuario (3 en EE.UU. en canales de 30 kHz, y 8 en Europa y Asia en canales de 200 kHz) en intervalos de tiempo muy cortos, del orden de 30 o 40 milisegundos. Cada usuario utiliza este intervalo de tiempo de forma secuencial; el oído apenas nota las breves interrupciones, aunque hay una pérdida de calidad apreciable. Es un hecho reconocido que la segunda generación de telefonía móvil perseguía el aumento de capacidad, aunque fuera a costa de la calidad de la comunicación. Sin embargo, en este sistema, sigue siendo necesaria la planificación de frecuencias y continúa sin aprovecharse todo el ancho de banda disponible.



1. Planificación de celdas y frecuencias en FDMA y TDMA (*izquierda*) y en CDMA (*derecha*).

Por último, la 3G o tercera generación de telefonía utiliza el sistema de acceso múltiple por división de código, CDMA (de Code Division Multiple Access). Permite aprovechar, de manera muy ingeniosa, la misma frecuencia (con un ancho de banda mayor) para *todos* los usuarios que se encuentran en el área de alcance de una determinada antena o base. No se requiere ya ninguna planificación de frecuencias, como se muestra en la figura 1 (*izquierda*); cada celda de la red puede servirse, en principio, de todo el ancho de banda disponible.

El CDMA ha sido posible gracias a la digitalización de la señal que viaja de nuestros teléfonos a la base o antena más cercana (aunque esta digitalización ya se encontraba en el TDMA). El teléfono convierte nuestra voz en una señal digital compuesta por ceros y unos. La base también transmite al teléfono una señal digital y éste la convierte en el voltaje que finalmente reproduce el sonido en el altavoz. Sin embargo, para explicar el funcionamiento del CDMA es mejor recurrir a los valores +1 y –1, en vez de unos y ceros. En esta representación, que se denomina polar, +1 equivale a un uno y –1 equivale a un cero.

A cada teléfono que recibe o realiza una llamada en el área correspondiente a una base, ésta le asigna un número binario de varios dígitos, código que podemos representar como una serie de números, en este caso +1 o –1 (en matemáticas, un *vector*). Un código de cinco dígitos podría ser, por ejemplo:

$$\boldsymbol{b} = (+1, -1, -1, +1, -1)$$

El teléfono necesita enviar y recibir constantemente bits, es decir, ceros y unos. Sin embargo, en el sistema CDMA no los envía directamente, sino que transmite el código $\boldsymbol{b}$ si el bit que quiere mandar es uno y $-\boldsymbol{b}$ si el bit que quiere mandar es cero. Utilizando la representación polar con +1 y –1, podemos expresar tal prescripción de la siguiente forma matemática: si lo que el teléfono quiere enviar es s, deberá enviar $s\boldsymbol{b}$. Como el código $\boldsymbol{b}$ tiene determinada longitud, 5 dígitos en nuestro ejemplo, aunque 64 o más en las ejecuciones reales del CDMA, necesitamos enviar todos estos bits para transmitir el bit *s*. Tamaño "derroche" nos permite identificar la fuente del bit entre todos los usuarios que se están comunicando con la base en un momento dado.

En la figura 2 podemos ver cómo funciona la codificación CDMA con el código ***b*** de cinco dígitos que hemos puesto de ejemplo. Según se aprecia en la figura, el número de bits que tiene que enviar el teléfono se multiplica por cinco. Normalmente un teléfono necesita enviar o recibir 9600 bits por segundo, para ello envía o recibe 1.228.800 bits por segundo utilizando distintos códigos, algunos propios del teléfono y otros propios de la base o asignados por ésta a una determinada conversación.

Cada teléfono o usuario tiene su propio código. Pese a ello, todos envían sus señales en la misma frecuencia. Por lo tanto, la base recibe la suma de todas ellas. Si están hablando simultáneamente 5 usuarios, por ejemplo, y si sus envíos están sincronizados, la señal que recibe la base en un intervalo de tiempo de longitud igual a la longitud de los códigos, es:

$$\boldsymbol{s} = s_1\boldsymbol{b}_1 + s_2\boldsymbol{b}_2 + s_3\boldsymbol{b}_3 + s_4\boldsymbol{b}_4 + s_5\boldsymbol{b}_5$$

en donde $s_1, ..., s_5$ son los bits que cada usuario quiere transmitir y $\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_5$ los correspondientes códigos. ¿Cómo puede la base inferir de esta suma la contribución de cada usuario? En este punto, el álgebra de vectores puede ayudarnos.

Una operación básica con vectores es el llamado *producto escalar*, que consiste en multiplicar las componentes de dos vectores una a una y sumar todos estos productos. Por ejemplo, el producto escalar de $\boldsymbol{a} = (1,5,4)$ y $\boldsymbol{b} = (3,0,2)$ es $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1 \times 3 + 5 \times 0 + 4 \times \times 2 = 11$. Cuando el producto de dos vectores es nulo, decimos que son *ortogonales*. La denominación proviene de que, en espacios de dos y tres dimensiones, el producto escalar de dos vectores que forman un ángulo de 90 grados es nulo.

Sin embargo, la ortogonalidad es una propiedad más general. Así, en el caso de vectores cuyas componentes son sólo +1 y –1, que el producto escalar sea nulo es equivalente a que difieran en la mitad de sus componentes. Los vectores ortogonales nos van a permitir resolver el problema del CDMA. Supongamos que los códigos asignados a cada usuario son ortogonales entre sí; en tal caso, si multiplicamos escalarmente la señal recibida ***s*** por uno de los códigos, por ejemplo $\boldsymbol{b}_1$, el producto de dicho código por todos los demás será nulo. Tenemos entonces:

$$\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{s} = s_1\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 = Ns_1$$

siendo *N* la longitud del código, ya que al multiplicar cada componente de $\boldsymbol{b}_1$ por sí misma el resultado es siempre 1 y la suma de todos esos productos conduce a $\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 = N$. Por lo tanto, si los códigos son ortogonales, la base puede recuperar la información enviada por cada usuario simplemente multiplicando escalarmente la señal recibida por el código correspondiente. El sistema de envío de información de la base a los teléfonos es similar. En este caso la base envía la suma ***s*** y son los teléfonos los que extraen de ella la información dirigida a cada uno.

La pregunta crucial para la capacidad de la red es entonces ésta: ¿cuántos códigos ortogonales existen y cómo podemos obtenerlos? El CDMA es ingenioso, pero no mágico: el número de códigos ortogonales es igual a la longitud de los mismos, o, formulado de modo más intuitivo y geométrico, el número máximo de vectores ortogonales en *N* dimensiones es precisamente *N*. Una forma particular de obtenerlos es a partir de las llamadas matrices de Hadamard-Walsh.

Se comienza con la matriz:

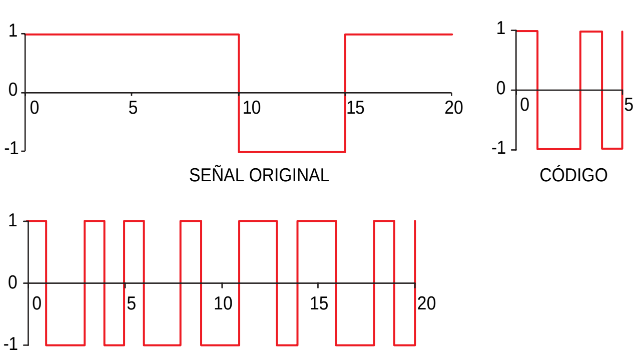
$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y se genera una nueva matriz mediante el siguiente algoritmo:

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuando de forma similar, se obtienen matrices en donde todas las columnas son vectores ortogonales entre sí. En la telefonía actual se utilizan estos códigos de Walsh con una longitud de 64 bits (aunque se extenderán a 256 en el próximo estándar de CDMA).

El sistema CDMA completo es bastante más complicado de lo que hemos esbozado aquí. Los códigos de Walsh se aplican a la transmisión base-teléfonos; para el envío de información de los teléfonos a la base se recurre a otro tipo de códigos que son sólo aproximadamente ortogonales. Si lanzamos dos monedas muchas veces, en más o menos la mitad de las tiradas ambas presentarán el mismo resultado. Por ello, dos vectores formados por +1 y –1 aleatorios tienden a ser ortogonales, lo cual permite construir códigos aproximadamente ortogonales mediante algoritmos muy simples que generan bits pseudoaleatorios. El mes próximo hablaremos de ellos.



2. La codificación de la señal en el sistema CDMA. La señal original se multiplica por el código del usuario y se envía a la base el resultado.