

El gran encuentro de las matemáticas mundiales

Las ecuaciones en derivadas parciales y la dinámica de fluidos, dos de los protagonistas del 28.º Congreso Internacional de Matemáticos

DIEGO CÓRDOBA Y ÁGATA TIMÓN GARCÍA-LONGORIA



LOS CUATRO GALARDONADOS con las medallas Fields en el 28.º Congreso Internacional de Matemáticos. De izquierda a derecha: Caucher Birkar, Alessio Figalli, Peter Scholze y Akshay Venkatesh.

El pasado mes de agosto tuvo lugar en Río de Janeiro la 28.ª edición del Congreso Internacional de Matemáticos (ICM, por sus siglas en inglés). Organizado una vez cada cuatro años desde 1897 (únicamente con interrupciones debidas a las guerras mundiales), esta fue la primera vez que se celebró en el hemisferio sur. Del 1 al 9 de agosto se sucedieron más de un centenar de charlas en las que se presentaron los avances más relevantes de los últimos años en la disciplina. Pese a la tremenda especialización de la investigación actual, que hace cada vez más difícil la comunicación entre expertos incluso de ramas cercanas, el ICM sigue suponiendo el gran encuentro internacional de la comunidad matemática.

Como es habitual, la Unión Matemática Internacional, organizadora del congre-

so, entregó las medallas Fields, a menudo consideradas el «Nobel de las matemáticas». Estas fueron otorgadas a Caucher Birkar (40 años), de la Universidad de Cambridge; Alessio Figalli (34), de la Escuela Politécnica Federal de Zúrich; Peter Scholze (30), de la Universidad de Bonn, y Akshay Venkatesh (36), de Stanford. Sus investigaciones se centran en campos variados: geometría aritmética, geometría algebraica, teoría de números y ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Esta última disciplina, representada en particular por Figalli, ha sido una de las protagonistas del congreso.

Modelizar la naturaleza

Muchas de las EDP más interesantes provienen de la modelización de fenómenos físicos, como la difusión del calor a través

de un sólido o la propagación del sonido de las cuerdas de una guitarra. También se usan para estudiar problemas en elasticidad, electromagnetismo, dinámica de fluidos o mecánica cuántica, entre otros muchos ámbitos. Como no siempre resulta posible disponer de soluciones explícitas a estas ecuaciones, los investigadores han desarrollado todo tipo de nuevas herramientas para estudiarlas.

Koji Ohkitani, experto en dinámica de fluidos de la Universidad de Sheffield, empleaba la siguiente analogía: «Los analistas perfeccionan la técnica, como carniceros afilando un cuchillo; entonces, cuando otros vean que esas ideas se pueden aplicar a una EDP concreta, cortarán la carne con el mejor cuchillo disponible». Por mencionar dos ejemplos históricos, las series de Fourier, que se concibieron

en su día para entender la ecuación del calor, o el cálculo de variaciones, que estudia los máximos y los mínimos de funcionales (como la energía de un sistema), constituyen hoy grandes campos de investigación con independencia de sus aplicaciones a las EDP.

Uno de los doce conferenciantes plenarios de este ICM, Luigi Ambrosio, de la Escuela Normal Superior de Pisa, emplea ambos enfoques: afila el cuchillo y corta la carne. Ambrosio fue director, junto al también medallista Fields Cédric Villa-

ni, de la tesis de Figalli, y ha sido una figura clave en el desarrollo del análisis matemático en las últimas décadas. En concreto, ha efectuado contribuciones de gran relevancia al cálculo de variaciones y a la teoría de la medida geométrica. Las nuevas técnicas desarrolladas por Ambrosio han resultado ser de gran utilidad para atacar problemas en ecuaciones elípticas y parabólicas no lineales.

Otra de las conferenciantes plenarias, Sylvia Serfaty, del Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de Nueva York, ha

resuelto problemas variacionales y de EDP que provienen de diversos modelos físicos. Una de sus contribuciones más destacadas ha sido el desarrollo de la teoría analítica de las ecuaciones de Ginzburg-Landau, que modelizan el comportamiento de los superconductores. En particular, Serfaty ha demostrado que las soluciones de estas ecuaciones contienen vórtices (estructuras similares a remolinos).

En la sección de EDP se han abordado otras cuestiones, como el estudio de sistemas dinámicos hiperbólicos, la ecuación

LAS NUEVAS ESTRELLAS DE LAS MATEMÁTICAS

COMO EN CADA EDICIÓN DESDE 1936, durante el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de este año se entregaron las medallas Fields. Unánimemente consideradas como uno de los mayores reconocimientos en la disciplina, estos galardones se entregan a investigadores de menos de 40 años que hayan destacado por sus aportaciones recientes al campo. A continuación se describe el perfil de cada uno de los condecorados.

Caucher Birkar (Irán, 1978)

Este catedrático de la Universidad de Cambridge nació y creció en un pueblo agrícola de la región kurda del oeste de Irán. En sus años de escuela, marcados por la guerra con Irak, su hermano mayor comenzó a enseñarle matemáticas avanzadas; fue él la persona que más le influyó en su formación y quien le animó a dedicarse a las matemáticas. Tras terminar sus estudios en la Universidad de Teherán, en el año 2000 se trasladó al Reino Unido, donde consiguió el estatus de refugiado y pudo realizar el doctorado en la Universidad de Nottingham.

Sus contribuciones más destacadas pertenecen al campo de geometría algebraica. Una de las ramas más veteranas de las matemáticas, esta área estudia las propiedades de las variedades algebraicas: aquellos conjuntos de puntos que satisfacen una o más ecuaciones polinómicas. Birkar trabaja en geometría birracional, que trata de clasificar dichas variedades en un pequeño número de familias. «El problema principal es mostrar que toda variedad puede transformarse [...] en una construida con tres tipos de bloques», explicaba el propio investigador en el ICM.

Alessio Figalli (Italia, 1984)

Catedrático en la Escuela Politécnica Federal de Zúrich desde 2016, Figalli realizó su doctorado en la Escuela Normal Superior de Pisa bajo la supervisión de Luigi Ambrosio y Cédric Villani, matemático de la Escuela Normal Superior de Lyon y medallista Fields en 2010.

El área de especialización de Figalli son las ecuaciones en derivadas parciales (EDP). El jurado destacó sus trabajos sobre teoría del transporte óptimo, la cual se centra en estudiar la distribución de elementos de un punto a otro con el menor coste posible. Sus aplicaciones van desde la transmisión del oxígeno a las células hasta el reparto de mercancías entre un almacén central y una cadena de supermercados. En particular, Figalli ha



aplicado ideas de este campo al estudio de las EDP.

Peter Scholze (Alemania, 1987)

Es uno de los medallistas Fields más jóvenes de todos los tiempos y está considerado uno de los matemáticos más brillantes de su generación. Fue el catedrático más joven de la historia de Alemania (con 24 años) y recientemente ha sido nombrado director del Instituto Max Planck de Matemáticas de Bonn.

De su trabajo, el jurado destacó «la revolución que ha provocado en geometría aritmética», una disciplina que une la teoría

de números y la geometría algebraica. Scholze es el creador de los «espacios perfectoides», los cuales se han convertido en una fructífera herramienta para resolver varias conjeturas abiertas en el campo y, en particular, en el llamado «programa de Langlands». Este constituye desde hace años una de las principales líneas de investigación en teoría de números, y pretende relacionar conceptos matemáticos que hasta hace poco se consideraban independientes.

Akshay Venkatesh (India, 1981)

Nacido en Nueva Deli, Venkatesh se crió en la ciudad australiana de Perth, a la que se mudó poco después de nacer. Con 13 años ingresó en la Universidad de Australia Occidental y con 16 se trasladó a la de Princeton, en EE. UU., para cursar un doctorado en teoría de números.

A lo largo de su carrera ha realizado aportaciones que relacionan esta disciplina con otros campos aparentemente distantes, como la topología algebraica y los sistemas dinámicos. Ha resuelto varios casos relevantes de una versión débil de la hipótesis de Riemann generalizada, y ha hecho varias contribuciones al estudio de las ecuaciones diofánticas, aquellas cuyos coeficientes son números enteros y de las que se buscan soluciones también enteras. En la actualidad es catedrático en Stanford.

ción no lineal del calor, los modelos de crecimiento de cristales, las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, la dinámica de solitones para ecuaciones dispersivas y la dinámica de fluidos. Seis de las 16 conferencias de esta sección se han dedicado a este último tema, un campo muy extenso que utiliza ideas de la física, la modelización, el análisis matemático y el análisis numérico.

La complejidad de los fluidos

La dinámica de fluidos constituye un área de gran actividad en la matemática contemporánea. Presenta una larga historia, pues en ella han trabajado grandes científicos desde sus inicios, que se remontan a Arquímedes. En el siglo XVII, Isaac Newton fue el primero en aplicar sus leyes de la mecánica al movimiento de los flujos, y además desarrolló el cálculo diferencial, que proporciona el lenguaje que permite expresar dicho movimiento. Sin embargo, fue el célebre Leonhard Euler quien, en 1755, escribió por primera vez el sistema de ecuaciones que describen la evolución de un fluido ideal (es decir, sin rozamiento e incompresible).

Sin embargo, y a pesar de todas las mentes brillantes que desde entonces han abordado su estudio, la complejidad de las ecuaciones de Euler es tal que aún persisten varios retos de primer orden. Por ejemplo, ni siquiera se ha podido demostrar la existencia de soluciones únicas. Eso significa que, matemáticamente, no podemos garantizar que, partiendo de los mismos datos iniciales, un flujo siempre vaya a exhibir el mismo comportamiento.

Tampoco se sabe si, aun comenzando con condiciones óptimas, las soluciones de las ecuaciones de Euler podrían perder su regularidad inicial y dar lugar a comportamientos abruptos, conocidos como «singularidades». De esta forma, partiendo de un sistema sin comportamientos bruscos, podrían formarse remolinos. Uno de los principales problemas abiertos consiste en determinar cuáles deberían ser las condiciones iniciales (regulares) que tendría que adoptar un fluido para que acaben formándose remolinos en un tiempo finito. Este es precisamente el reto que plantea uno de los célebres Problemas del Milenio, solo que aplicado al caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales se obtienen a partir de las de Euler incorporando la viscosidad. Por ahora, la cuestión permanece abierta.

Análisis y simulaciones

Pese a ello, en las últimas décadas se han logrado varios avances al respecto. En el ICM de este año se han presentado distintos resultados relativos a la formación de singularidades, a la existencia global de soluciones y a la relación entre los fluidos viscosos y los no viscosos. Uno de nosotros (Córdoba) impartió una conferencia invitada sobre la formación de cierto tipo de singularidades que se producen en la superficie de separación de dos líquidos inmiscibles (como el aceite y el agua). Dichas singularidades permiten explicar con detalle cómo las olas crecen, giran o se derrumban, así como el proceso de división de una gota en dos.

El estudio de los fluidos presenta enormes retos debido a que, en general, se trata de sistemas inestables (en los que pequeñas perturbaciones pueden cambiar por completo la configuración del sistema), no lineales (las respuestas no son proporcionales al estímulo que las provoca) y no locales (lo que ocurre en un punto no depende solo de lo que sucede en su entorno inmediato, sino del estado de todo el fluido). A lo largo de los años, estas dificultades han hecho que para analizar estos sistemas no solo se empleen complejas técnicas analíticas, sino también simulaciones numéricas; es decir, soluciones aproximadas con la ayuda de un ordenador, las cuales permiten entender las propiedades de las soluciones.

Un ejemplo destacado es el programa desarrollado por el grupo de investigación en ecuaciones diferenciales, análisis numérico y aplicaciones (EDANYA) de la Universidad de Málaga, que simula la evolución de tsunamis en el Mediterráneo. La evolución de un tsunami viene determinada por EDP no lineales y no locales. Su solución explícita se ignora, por lo que se emplean soluciones aproximadas. Hasta hace poco, sin embargo, las simulaciones por ordenador tardaban días en proporcionar resultados precisos, lo que hacía impracticable su uso. Ahora, gracias al trabajo del grupo EDANYA, el tiempo de cómputo ha logrado reducirse a unos pocos minutos. Uno de sus miembros, Manuel Castro, impartió una conferencia en la sección de análisis numérico y simulaciones del congreso. Córdoba y Castro han sido los únicos representantes españoles en el programa científico del ICM.

Matemáticas y sociedad

En total, a Río acudieron unos 3000 matemáticos de 114 países, una cifra considera-

blemente inferior a la de la edición anterior, celebrada en Seúl y a la que asistieron más de 5000 investigadores. En 2014, la mitad de los asistentes procedían de Corea del Sur. En Brasil, sin embargo, debido a los recortes en ciencia sufridos durante los últimos años, la presencia de matemáticos locales fue relativamente baja. Tampoco hubo lugar para ningún matemático latinoamericano entre los nuevos ganadores de la medalla Fields. Tras el reconocimiento de Artur Ávila en 2014, el primer latinoamericano en conseguirla, muchos esperaban que los premios continuaran destacando el talento fuera de las grandes instituciones europeas y estadounidenses. Esta vez tampoco se ha premiado a ninguna mujer, con lo que la iraní Maryam Mirzakhani, tristemente fallecida en 2017, sigue siendo por el momento la única de la lista. Veremos qué sucede dentro de cuatro años en San Petersburgo, donde tendrá lugar el próximo ICM.

Diego Córdoba es profesor de investigación del CSIC en el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) de Madrid.

Ágata Timón García-Longoria es responsable de comunicación y divulgación en el ICMAT.

PARA SABER MÁS

What makes the hardest equations in physics so difficult? Kevin Hartnett en *Quanta Magazine*, 16 de enero de 2018. Disponible en www.quantamagazine.org/what-makes-the-hardest-equations-in-physics-so-difficult-20180116

Interface dynamics for incompressible fluids: Splash and splat singularities. Diego Córdoba en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018*, vol. 2, págs. 2187-2208 (en prensa).

A review of higher order well-balanced path-conservative finite volume schemes for geophysical flows. Manuel J. Castro et al. en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018*, vol. 3, págs. 3499-3522 (en prensa).

EN NUESTRO ARCHIVO

El horizonte visible de las matemáticas. Ágata Timón García-Longoria y David Fernández en *IyC*, noviembre de 2014.

Vórtices anudados en fluidos ideales. Alberto Enciso y Daniel Peralta-Salas en *IyC*, junio de 2015.

El turbulento viaje de la energía. José I. Cardesa, Alberto Vela-Martín y Javier Jiménez en *IyC*, mayo de 2018.