- Contenidos: Escalas lineales y logarítmicas. Relaciones entre cantidades físicas. Gráficos. Pendiente y tasa de cambio. Geometría aplicada: trigonometría, teorema del seno, teorema del coseno, teorema de Pitágoras, ternas pitagóricas.

- Fecha: Lunes 05 de Marzo de 2017

Representando gráficamente el ordenamiento entre cantidades.

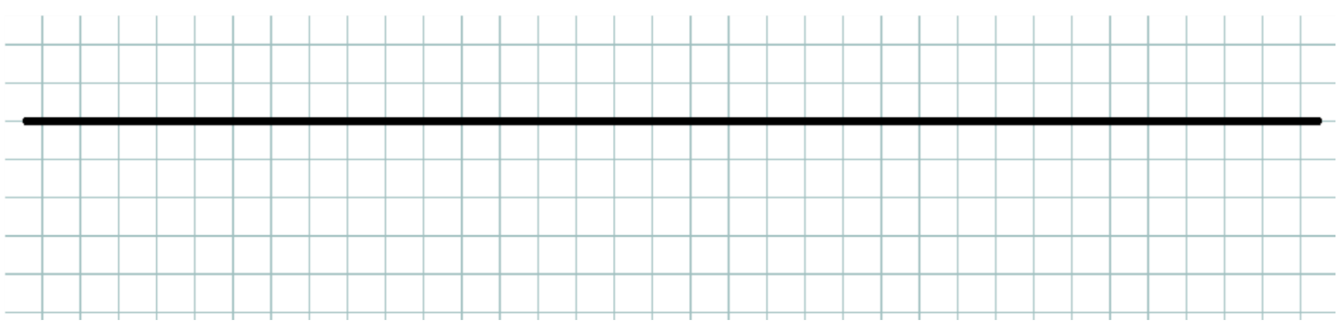
La gama de órdenes de magnitud de diferentes cantidades físicas que encontramos en la naturaleza es extremadamente amplia. Basta con visualizar el video "The Power of Ten" donde se distinguen distancias muy pequeñísimas, características de fenómenos a nivel de física de partículas fundamentales, hasta distancias mucho más que colosales y correspondientes a objetos cosmológicos.

Pero seamos más inmediatos y para ello consideremos, por ejemplo, el rango de diferencias de potencial eléctrico o voltajes que en los aparatos domésticos podemos encontrar. En la tabla podemos apreciar rápidamente algunos valores, y de manera relativamente directa compararlos. Pero ¿podríamos gráficamente realizar tal comparación si disponemos esos valores a lo largo de una recta?

Objeto	Volt
Reloj	1,5
Linterna	3,0
Cargador Celular	4,5
Puerto USB 3.0	5,0
Sintetizador	9,0
Equipo de musica	12,0

EJERCICIO 1: Usa la porción de hoja de cuaderno cuadriculado adjunta para que a lo largo de la línea ya trazada vayas marcando los valores que se encuentran en la escala. Con este fin y antes de realizar el marcado responde a las siguientes interrogantes:

- ¿Con qué mínimo valor comenzarás a marcar?___________________________
- ¿Cuál será el máximo valor que marcarás?_______________________________



Introduzcamos un poco de notación y definamos algunas cosas:

- Para referirnos a un intervalo de una cantidad X usaremos el símbolo Δ, así si se tienen dos valores como $X_1 = 2$ y $X_2 = 5$ entonces el intervalo entre X_2 y X_1 será: $\Delta X_{1->2} = X_2 - X_1 = 3$, simplemente $\Delta X = 3$.
  También es usual referirse al uso del símbolo Δ a modo de variación de una cantidad o cambio. Por otro lado, si te fijas en la notación hay una suerte de ordenamiento: "final" menos "inicial", "cantidad con mayor índice" menos "cantidad con menor índice".

- Por X_{min} y X_{max} nos referiremos a las cantidad cuyo valor es el más pequeño a considerar y cuyo valor es el máximo a considerar, correspondientemente.

- Como vamos a estar construyendo representaciones de datos a lo largo de una recta y por ende trabajando con distancias para ubicar los datos, entenderemos por L_{total} como distancia entre las marcas de los valores X_{min} y X_{max} a lo largo de la recta a usar. La letra d la usaremos para medir la distancia entre la marca del valor X_{min} y un valor intermedio cualquiera representado por la letra x.

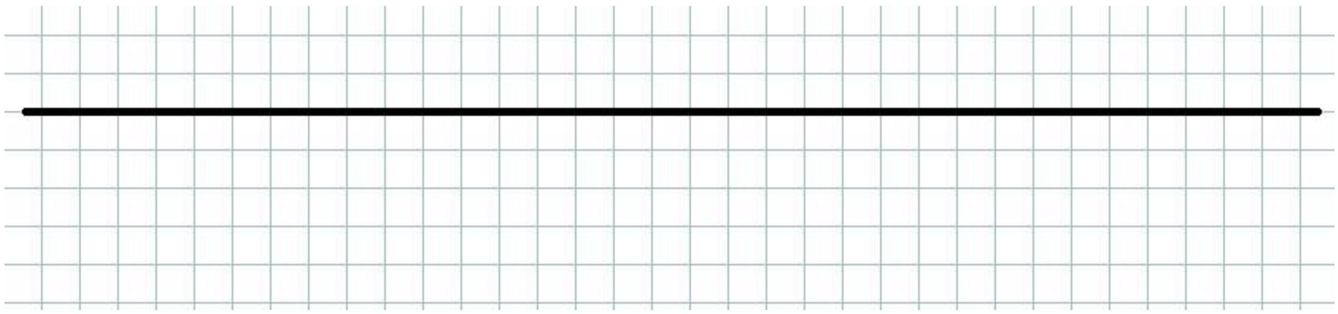
Si te fijas que hay una relación de proporcionalidad directa entre los intervalos de valores ΔX y las distancias correspondientes. Esto es justamente lo que sirve como "receta" para construir lo que llamaremos **Escala Lineal o Proporcional**:

$$\frac{x - X_{min}}{d} = \frac{X_{max} - X_{min}}{L_{total}} \quad (1)$$

Considera ahora la siguiente tabla, también con valores de voltajes que nos encontramos en el mundo inmediato.

EJERCICIO 2: Usa la hoja de papel que se adjunta como figura para ubicar los datos presentados en la tabla utilizando una escala lineal.

Objeto	Volt
Nivel Neuronal	0,07
Computador	12
Suministro Casa	240
Suministro Industrias	440
Alta tensión, Centrales	25000
Tubo Rayos X	130000
Relámpago	3000000

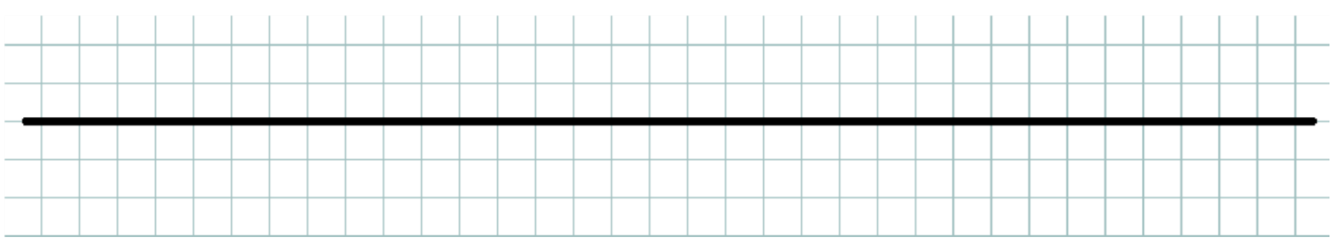


Claramente tenemos un problema aquí, y está más que claro que con el rango de valores de la última tabla difícilmente podremos dibujar algo útil si pensamos en la clásica receta para escalas lineales o proporcionales. Sin embargo hay una posibilidad de salir del dilema y para ello…

EJERCICIO 3: Completa la tabla siguiente con l os órdenes de magnitud de cada una de las cantidades indicadas.

EJERCICIO 4: En vez de crear una escala lineal en que los valores dictan cómo vas colocando las marcas, usa la hoja de papel adjunta para que en su línea ubiques los valores de los órdenes de magnitud de las cantidades. Para construirla considera los órdenes de magnitud como tus valores.

Objeto	Volt	~
Nivel Neuronal	0,07	
Computador	12	
Suministro Casa	240	
Suministro Industrias	440	
Alta tensión, Centrales	25000	
Tubo Rayos X	130000	
Relámpago	3000000	

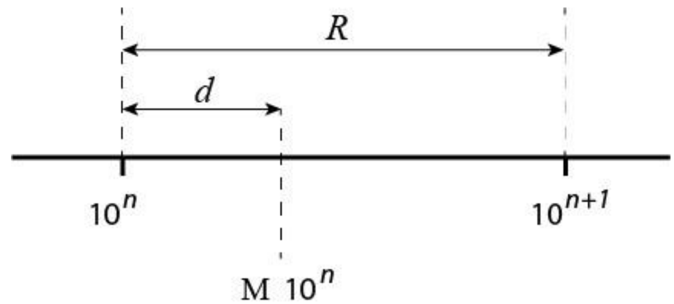


¿Qué te parece? ¿Es más fácil poder ubicar de esta manera todas las cantidades distinguiendo a la mayoría de ellas? Ahora la proporcionalidad no es entre distancias en la recta y valores de las marcas consecutivas, sino que la proporcionalidad ahora está en las potencias (los logaritmos de los órdenes de magnitud en nuestro caso):

$$Log_{10}(10^n) = n$$

A este tipo de escalas les llamamos **Escalas No Lineales** o **Escalas Logarítmicas**.

Si una cantidad x escrita en notación científica como M·10n, se quiere ubicar entre las marcas correspondientes a 10^n y 10^{n+1}, que a su vez están a distancia R entre ellas, la distancia d a la que hay que ubicar la cantidad x, respecto de 10^n está dado por:



$$d = R\ Log_{10}(M) \quad (3)$$

<u>**Observar gráficamente el comportamiento entre dos variables físicas.**</u>

Cuando se quiere describir algún fenómeno, muchas veces podemos estar interesados en saber si hay algún patrón o regla detrás del comportamiento de las cantidades involucradas en la situación. Un buen ejemplo de la vida cotidiana es cuestionarse si hay relación entre el transcurrir de los días de la semana y el tiempo de reacción para apagar el despertador en la mañana. Por otra parte, ingenieros y científicos exploran las relaciones que existen entre variables físicas cuantificables, tal cual el tiempo de reacción lo es.
Lo que realizaremos en esta semana es graficar dicha información, debido a que un buen gráfico permitirá obtener la relación que liga las variables estudiadas. Si debes realizar un gráfico con los datos de la tabla, el objetivo es lograr emplear una escala adecuada. Sabemos que dichas escalas se representan con rectas, las cuales sólo cobrarán sentido si en vez de ser superpuestas en forma paralela, se cruzan perpendicularmente, como seguramente lo has visto anteriormente. En este momento, sería conveniente que investigues o recuerdes los conceptos de **abscisas** y **ordenadas**.

Existe un convenio para decidir qué va en la escala horizontal y qué en la vertical del gráfico a construir: en la **horizontal** se colocan las marcas correspondientes a la escala en que estaremos representando a las cantidades físicas sobre las cuales tenemos control (o <u>variable independiente</u>), y en la **vertical** quedará la escala que representa a aquellas cantidades físicas que podrían depender de las cantidades controladas (o <u>variable dependiente</u>)

Comportamiento Uniforme o Lineal.

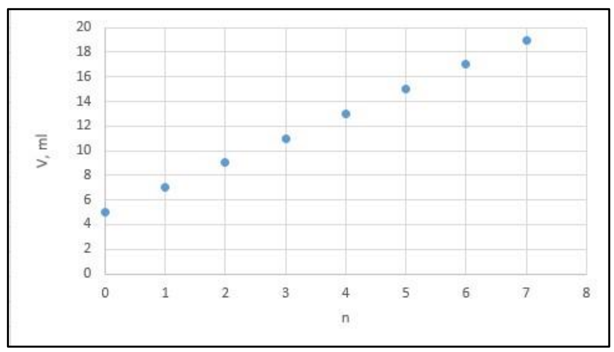
Considera el siguiente problema: Imagina que en tu casa tienes una llave que no cierra bien, por lo que colocas un recipiente de vidrio para colectar el agua que deja pasar aun estando cerrada. Decides medir el volumen de agua que se acumula en el recipiente. Afortunadamente, éste tiene una serie de marcas que te permiten medir el volumen de agua directamente. Así terminas con la siguiente tabla de datos.

Gotas caidas	Volumen ml
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15
6	17
7	19

A continuación, realizas la siguiente definición de variables para comunicar tus resultados:

- *n*: número de gotas caídas,
- *V*: volumen acumulado en el recipiente.

Siguiente paso, decides graficar y para ello utilizas simplemente Excel, puesto ya sabes realizar gráficos a mano y ahora estás preparado para un cambio de tecnología. Seguramente obtienes algo como el grafico adjuntado. Observa cómo cada eje posee el símbolo y unidad de medida de la cantidad física involucrada.

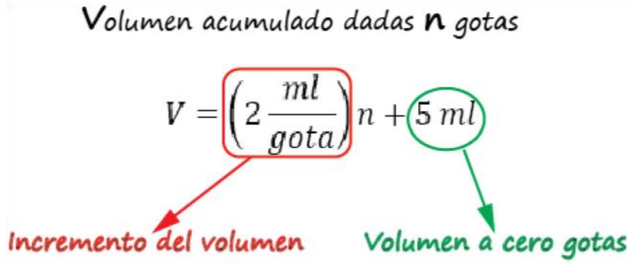


Los puntos se muestran como si se encontrasen alineados a lo largo de una recta imaginaria. Si eso es así, no haría mal el tomar una regla y trazar con lápiz de color la supuesta recta.

Como se puede apreciar, el volumen de agua que se acumula en el recipiente aumenta "**proporcionalmente**" a la cantidad de gotas que han caído a éste.

El anterior es un ejemplo de relación entre dos cantidades en la cual una cambia proporcionalmente con el cambio de la otra. Se conoce este comportamiento con los nombres de "uniforme", "lineal" (la gráfica es un segmento recto), entre otros.

Si queremos ser explícitos en la relación podríamos tratar de escribirla como: $V = kn$, donde *k* es la **constante de proporcionalidad**. En otras palabras, la relación entre *V* y *n* queda explícitamente descrita por:



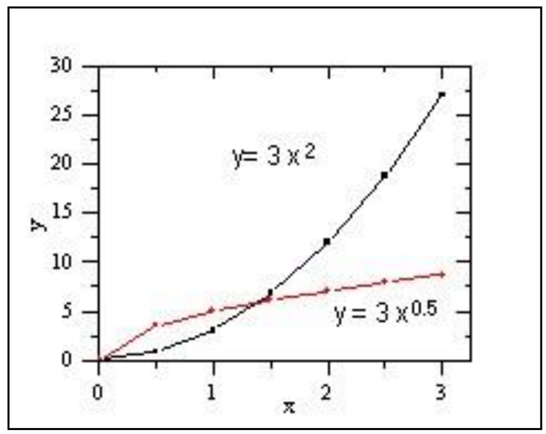
Expresión que corresponde a la **Ecuación de la Recta:**

- $y = mx + b$

donde y y x son dos cantidades que se relacionan entre sí de manera “lineal”, y en la que *m* se conoce como “**pendiente**” de la recta mientras que *b* se conoce como “**coeficiente de posición**”, los que a su vez podríamos considerar como parámetros.

Relación Potencial

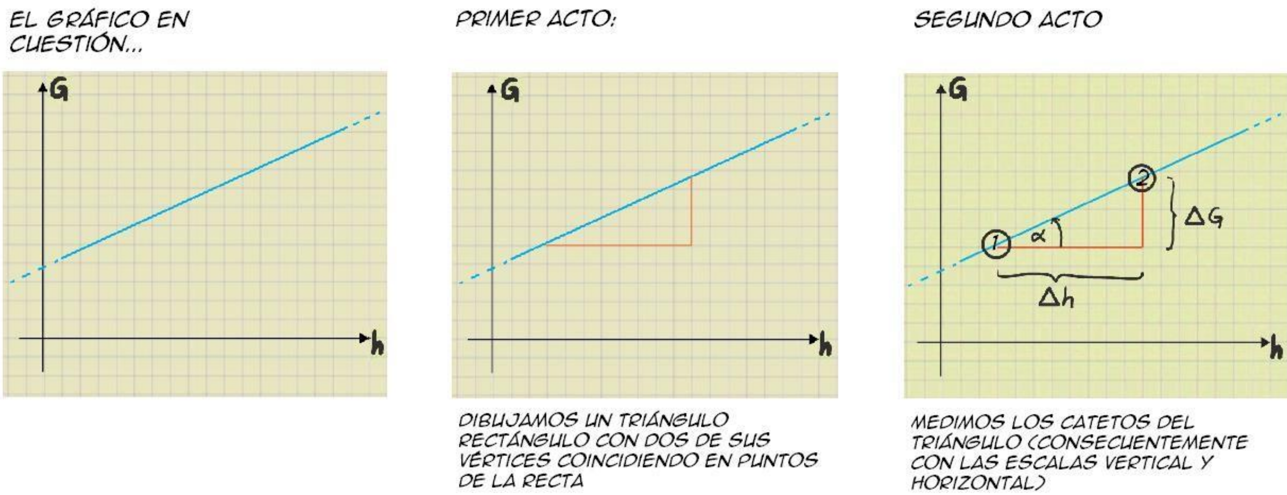
Si los puntos (x_j, y_j) se disponen en el gráfico como en las curvas de color negro y rojo del gráfico a la derecha, podría ocurrir que la relación entre las variables "y" y "x" fuera del tipo potencial:



- $y = Kx^n$ con $K > 0$

Pendiente y Tasa de cambio

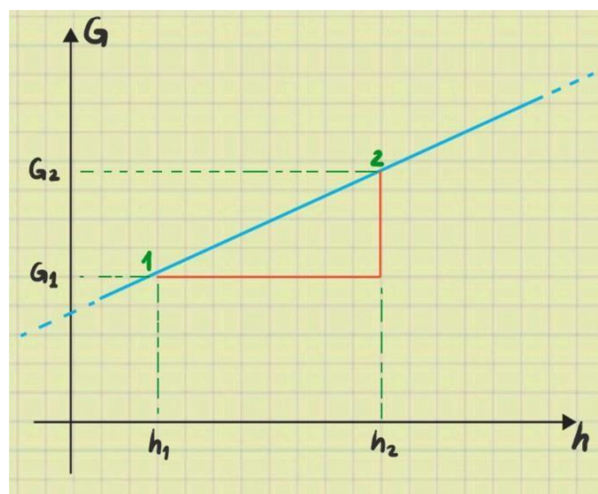
Dada una recta la pendiente de ésta se puede determinar geométricamente. Para refrescar más la memoria qué mejor que una imagen:



Así, lo que conocemos como pendiente de la recta, y que suele denotarse por la letra *m*, se obtiene en:

TERCER ACTO: CALCULAMOS LA TANGENTE DEL ÁNGULO α:

$$\frac{\text{CATETO VERTICAL}}{\text{CATETO HORIZONTAL}} = \frac{\Delta G}{\Delta h}$$



Nota que en el dibujo del segundo acto hemos resaltado dónde los vértices del triángulo coinciden con puntos en la recta, denotados por 1 y 2. Lo hemos hecho porque con la notación introducida en las lecturas anteriores, podemos aprovechar lo que la siguiente imagen sugiere y que seguramente es la otra forma que conoces para obtener la pendiente de una recta: a partir de un par de puntos.

$$\Delta G = G_2 - G_1,$$

$$\Delta h = h_2 - h_1,$$

De esta manera:

$$m = \frac{\Delta G}{\Delta h} = \frac{G_2 - G_1}{h_2 - h_1}.$$

Y esto lo podemos leer de manera alternativa a la interpretación gráfica proveniente del cálculo geométrico dado en los actos mostrados en los primeros dibujos:

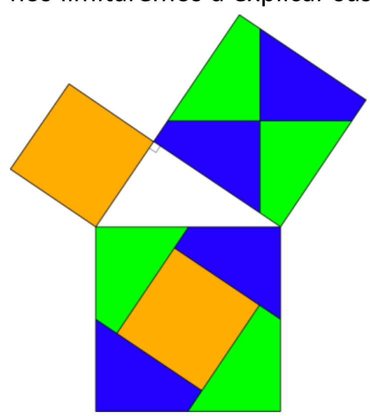
* • **La pendiente corresponde al cociente entre el cambio en la variable dependiente y el cambio correspondiente de la variable independiente.**

Geometría aplicada

La geometría es una herramienta necesaria para la descripción de los vectores, toda vez que hemos convenido que ellos son una representación gráfica de ciertas cantidades físicas, por lo que están íntimamente conectadas con ángulos, polígonos y por supuesto, funciones trigonométricas.

Es así, como en este apartado describiremos la conexión existente entre todos estos conceptos a través de una serie de teoremas y algunos casos particulares que, si bien son incapaces de describir el universo total de posibilidades, son de utilidad dada la sencillez con que operan.

Las aplicaciones de las herramientas que veremos a continuación, podrás verlas en los ejercicios en clases, los seleccionados del texto guía, o las ayudantías, por lo que nos limitaremos a explicar sus orígenes y utilidad:



Teorema de Pitágoras:

Existen varias formas de enunciar este teorema, pero lo más sencillo en vista del uso que le daremos, es a través de la explicación de la siguiente a la derecha. Para explicarla, definiremos una serie de elementos:

- **Triángulo rectángulo:** Polígono de 3 lados que tiene un ángulo recto, en nuestra imagen, la figura blanca.
- **Hipotenusa:** En un triángulo rectángulo, el mayor de sus lados que a su vez, se encuentra frente al mayor ángulo.
- **Catetos:** Cualquiera de los dos lados menores de un triángulo.

Así, podremos explicar que el teorema de Pitágoras dice que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, debe ser igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Aquello que aparece representado en la imagen, se puede escribir matemáticamente como:

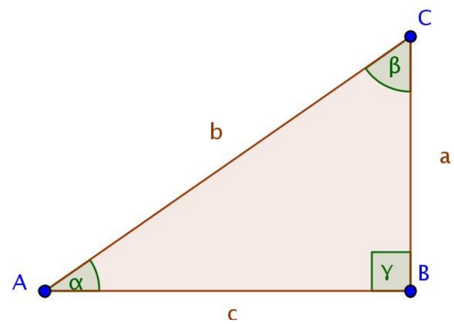
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Siendo C la hipotenusa y A y B los catetos.

Debido a la conmutatividad de la suma, es evidente que, en términos de la validez del teorema de Pitágoras, es irrelevante la elección que hagamos de los catetos.

Sin embargo, se suele utilizar la siguiente nomenclatura:

- A, B, C: Vértices del triángulo rectángulo. Se dice que este es “rectángulo en B”.
- c: Cateto adyacente a α.
- a: Cateto opuesto a α
- b: Hipotenusa.



¿Cómo quedaría escrito entonces el teorema de Pitágoras para este triángulo?

*Es importante notar que, si bien definimos *c* como el cateto adyacente a α, podríamos haber realizado la siguiente definición sin alterar el teorema:

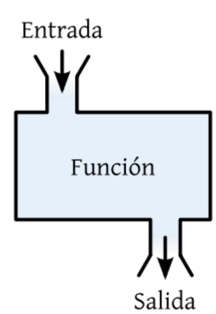
- a: Cateto adyacente a β.
- c: Cateto opuesto a β.
- b: Hipotenusa.

*

- Entonces, suele ser más útil recordar el teorema de Pitágoras como: **La suma de los cuadrados de los catetos, es igual a la hipotenusa al cuadrado.**

Funciones trigonométricas

Sin realizar un esfuerzo innecesario, podremos definir una función en base al esquema mostrado. Una función trigonométrica será una “máquina” cuya información de entrada es un ángulo escrito en radianes y que entrega como salida la relación entre los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio unitario.



Así, se definen las funciones trigonométricas más relevantes:

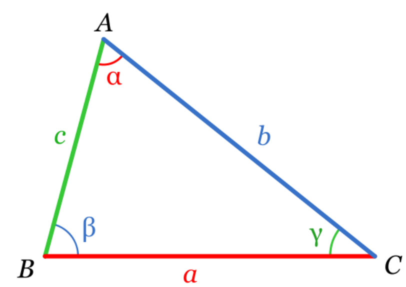
$$\sin\theta \coloneqq \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta \coloneqq \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\theta \coloneqq \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Teniendo claras estas definiciones, podemos construir dos ayudas trigonométricas adicionales, que se conocen como teoremas del seno y del coseno. A continuación, te explicamos ambos:

Teorema del seno: Suele utilizarse para establecer relaciones de proporcionalidad entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos a ellos. Una de sus ventajas, es que no solo es válido para triángulos rectángulos.



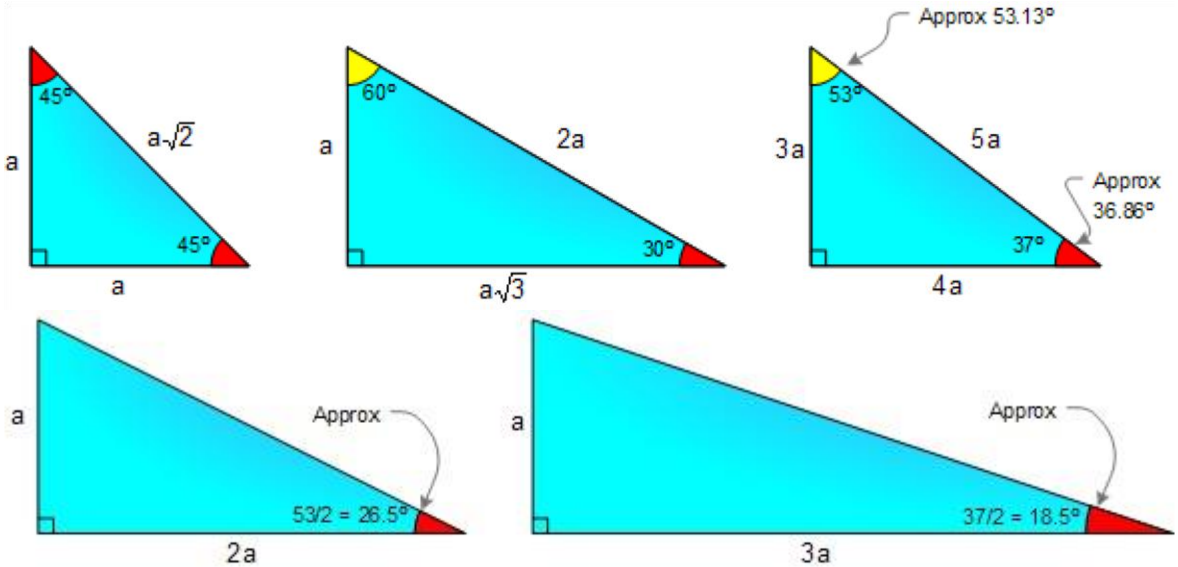
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Teorema del coseno: Aprovechándonos de la figura mostrada, el teorema del coseno puede ser enunciado como:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos\gamma$$

Si tienes problemas con aprendértelo con letras y números, puedes intentar con lo siguiente: “En un triángulo el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de la multiplicación de ambos por el coseno del ángulo que forman entre ellos”.

Triángulos notables: Haciendo uso de la semejanza y congruencia en triángulos, podrás simplificar el desarrollo de una serie de problemas, cuando identifiques que involucra alguno de los siguientes triángulos notables:



Si te preguntas cuál podría ser la utilidad de conocer estos triángulos, te recordamos que las funciones trigonométricas establecen relaciones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, por lo que conociendo los lados puedes conocer el ángulo y viceversa, sin hacer uso de la calculadora.